Límites de Funciones

PROGRAMA DE ACOMPAÑAMIENTO EN MATEMÁTICAS[1]

[1]Santiago Ortiz Quintero

29 de septiembre de 2025

Resumen

Este documento presenta una introducción al concepto de límite de funciones, fundamental para el cálculo diferencial e integral. Se explica la definición formal en términos de ϵ y δ, así como una versión más intuitiva para facilitar la comprensión inicial. También se abordan las condiciones de existencia de límites, las indeterminaciones más comunes y propiedades básicas como suma, producto, cociente y el teorema del sándwich. Se incluyen ejemplos resueltos que ilustran casos de continuidad, discontinuidades removibles y no removibles, además de demostraciones de límites mediante la definición formal. Finalmente, se proponen ejercicios con sus soluciones y se concluye resaltando la importancia de los límites como base para conceptos avanzados del cálculo como la derivada y la integral.

1. Introducción

Los límites de funciones son la base para la posterior definición de conceptos tan importantes como la derivada, la integral o las series. A pesar de que la definición formal de límite para una función es un poco profunda y, a priori difícil de comprender, se trata de una definición necesaria para darle solidez al cálculo diferencial e integral.

En este documento se pretende explicar la definición formal del límite en términos bastante más cotidianos de manera que el estudiante pueda formarse una primera idea que le proporcione la suficiente confianza para afrontar las importantes aplicaciones de los límites.

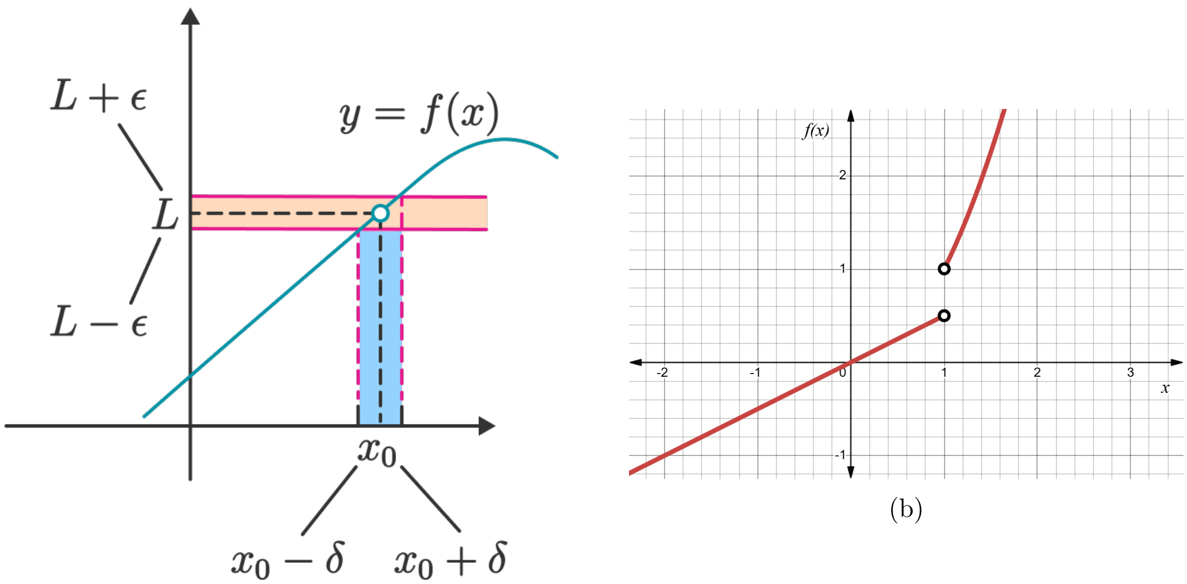
2. Definición

2.1. Definición formal

Si se tiene una función $f(x)$, se dice que $\lim_{x\to a} = L$ si se cumple que para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ de modo que

$$0 < |x-a| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - L| < \epsilon.$$

En otras palabras, si para cualquier margen de error ϵ que se elija alrededor de L (puede ser positivo o negativo), entonces es posible encontrar un intervalo alrededor de a de radio δ en donde x se encuentre pero sin tomar el valor a y $f(x)$ queda dentro del margen ϵ alrededor de L.



(a) (b)

Figura 1: Representaciones gráficas del límite de una función.

2.2. Definición informal

Desde una perspectiva no tan técnica, se dice que $\lim\limits_{x\to a} = L$ si los valores de $f(x)$ se van acercando a L cuando x se acerca a a pero sin llegar a que $x = a$. Además, no necesariamente $f(a) = L$, pues la función $f(x)$ puede no estar definida en $x = a$.

Gráficamente, en la Figura 1a se puede observar cómo nos podemos acercar al límite de una función sin llegar a evaluar la función en el punto. Por otro lado, en la Figura 1b se puede notar cómo no siempre se puede obtener el mismo valor de L al realizar el acercamiento al punto por la derecha y por la izquierda. En este caso, se dice que la función es discontinua y esa discontinuidad no es removible. De la situación que se da en la Figura 1b se hace necesario proponer unas condiciones de existencia para el límite. Esas condiciones se definen a continuación:

1. Debe existir el límite lateral por la derecha: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.

2. Debe existir el límite lateral por la izquierda: $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$.

3. Ambos límites laterales deben ser iguales: $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$.

2.3. Indeterminaciones

Se consideran indeterminaciones a expresiones a las que se llega al evaluar una función en algún x y para el cual la función no está definida. Como lo indica el nombre, las indeterminaciones involucran la imposibilidad de determinar el valor de la función evaluada. A continuación se muestran las expresiones que se consideran indeterminaciones:

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ \infty\cdot 0,\ \infty-\infty,\ \infty^0,\ 0^0, 1^\infty.$$

Si a la hora de evaluar un límite nos encontramos con alguna de estas expresiones, entonces es necesario realizar algún proceso dentro de la expresión con el objetivo de eliminar la indeterminación y poder evaluar el límite apropiadamente.

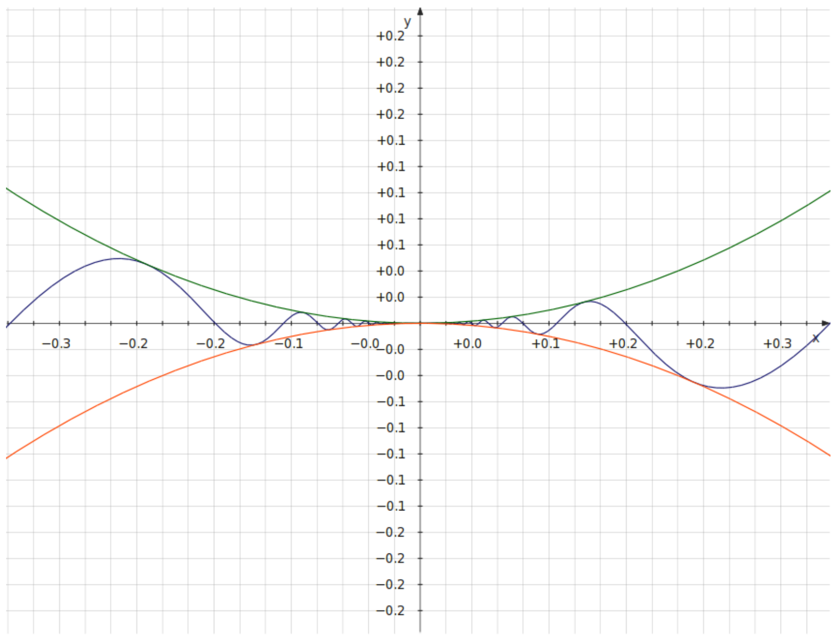


Figura 2: Gráfica de ejemplo del teorema del Sándwich. La función azul siempre se encuentra limitada por las funciones de color verde y rojo y al intentar obtener el límite cuando x tiende a cero para la función azul, sería equivalente a obtener los límites para las otras dos funciones.

3. Ecuaciones

Algunas propiedades básicas de los límites involucran la suma, el producto y el cociente de límites. Si $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x\to a} g(x) = L_2$, entonces

- $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = L_1 \pm L_2$.
- $\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = L_1 \cdot L_2$.
- $\lim_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$, si $L_2 \neq 0$.

Adicional a esto, sería importante mencionar un teorema de gran utilidad a la hora de demostrar límites para funciones complicadas. Se trata del teorema del sándwich. Se dice que si se puede demostrar que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ y, además, $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$, entonces $\lim_{x\to a} g(x) = L$. En otra palabras, si una función se encuentra acotada por otras 2 funciones, y esas 2 funciones tienden al mismo límite en un punto, entonces la función del medio también tiende a ese límite.

4. Ejemplos

4.1. Límite y función evaluada

Este es el caso más básico para resolver. Considérese la función $f(x) = x^3$. Obtener $\lim_{x\to 2} f(x)$.

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} x^3 = 2^3 = 8.$$

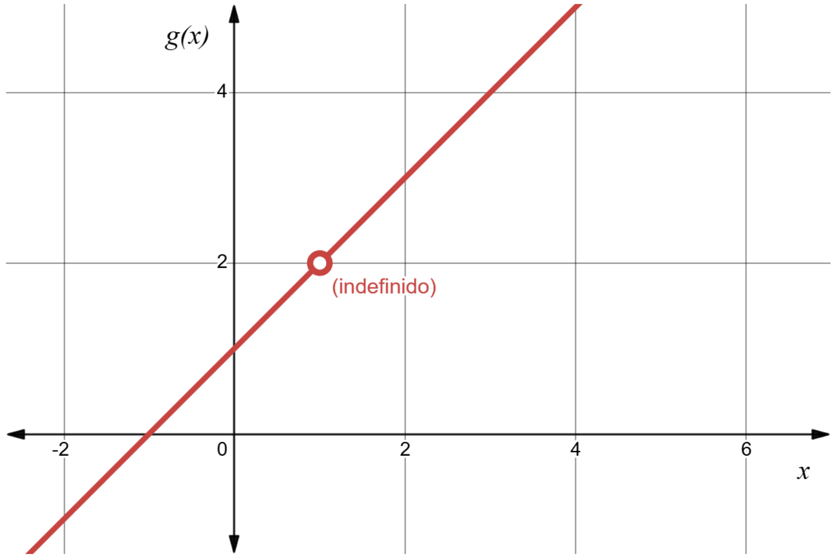


Figura 3: Gráfica de la función $g(x)$.

Nótese que si se evalúa directamente la función $f(2) = 8$ coincide con el límite. Este ejemplo básico proporciona la información necesaria para acercarnos al concepto de continuidad. Con esto, se puede decir que la función $f(x) = x^3$ es continua en $x = 2$, pues el la función evaluada y su límite en ese punto coinciden.

4.2. Función con discontinuidad removible

Considerése la función

$$g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

La función evaluada en $x = 1$ no tiene una definición precisa, pues conlleva a una indeterminación de tipo $0/0$. Sin embargo, si se grafica la función $g(x)$ vamos a notar que se trata de una simple recta. Sin embargo, esta recta tiene la particularidad de tener una discontinuidad en el punto $(1, 2)$, como se puede notar en la Figura 3. Esto proporciona una pista de cuál debería ser el valor de $\lim_{x \to 1} g(x)$. O sea, es de esperar que el resultado de este límite sea 2, pues al acercarnos gráficamente por la izquierda y por la derecha se obtiene este resultado.

Este límite es de tipo algebráico y se resuelve fácilmente al notar la diferencia de cuadrados que existe en el numerador de la función. Factoricemos el numerador:

$$g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}.$$

Cancelando el término $x - 1$ se obtiene que

$$\frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1.$$

Sin embargo, esta función resultante que coincide con la recta de la Figura 3 no es exactamente la función original $g(x)$; recordemos que $g(x)$ no está definida en $x = 0$, mientras que $x + 1$ sí. De todas maneras, a la hora de resolver el límite sí es posible utilizar $x + 1$ para evaluarlo y resolverlo:

$$\lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 1).$$

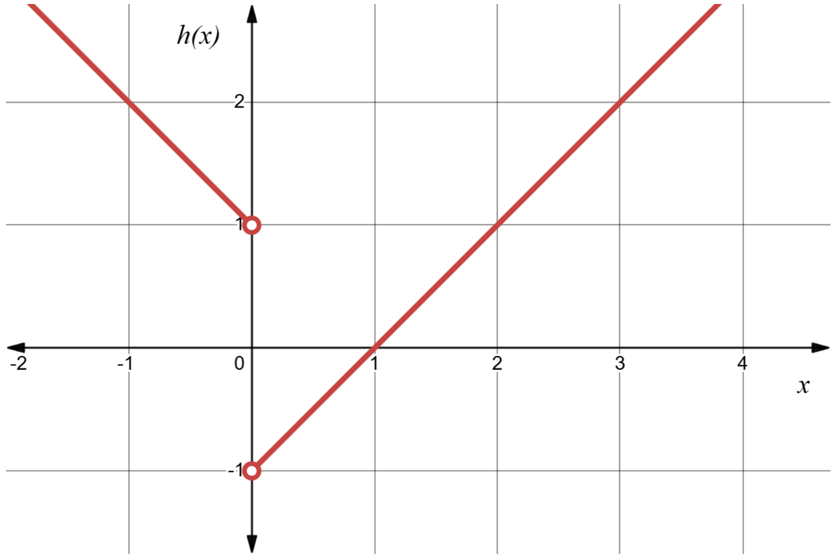


Figura 4: Gráfica de la función $h(x)$

Ahora, evaluando el límite:

$$\lim_{x\to 1} g(x) = 1 + 1 = 2.$$

Con todo, si se quiere remover la discontinuidad de $g(x)$, es necesario definir a $g(1)$ igual a 2, de manera que

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1. \end{cases}$$

4.3. Discontinuidad no removible

Considérese ahora a la función $h(x)$ definida a trozos:

$$h(x) = \begin{cases} -x + 1, & x < 0 \\ x - 1, & x > 0. \end{cases}$$

La gráfica de esta función se muestra en la Figura 4. La función $h(x)$ no se encuentra definida en $x = 0$. Se puede tratar de obtener el límite de la función en $x = 0$ para conocer si existe una discontinuidad removible o no. Para hallar este límite es necesario conocer primero sus límites laterales, los cuales no son problema:

- $$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} (x - 1) = 0 - 1 = -1.$$
- $$\lim_{x\to 0^-} h(x) = \lim_{x\to 0^-} (-x + 1) = -0 + 1 = 1.$$

De esta manera, ya que los límites laterales no coinciden, entonces se puede afirmar que la función $h(x)$ posee una discontinuidad no removible en $x = 0$, por lo que no se le puede dar una definición a $h(x)$ de manera que su discontinuidad en $x = 0$ desaparezca.

4.4. Límite por definición 1

Demostrar que $\lim_{x \to 1}(4x-1) = 3$ utilizando la definición de límite ϵ-δ.

Para demostrar el límite utilizando la definición formal se requiere demostrar la existencia de algún número δ para cumplir con las condiciones dadas en la definición formal. Bajo dicha definición, y en este ejemplo, se dice que existe un δ de modo que para

$$0 < |x-1| < \delta \tag{1}$$

se cumple que

$$|(4x-1)-3| < \epsilon.$$

De esta manera,

$$\begin{aligned} |4x-4| = 4|x-1| &< \epsilon \\ |x-1| &< \frac{\epsilon}{4}. \end{aligned} \tag{2}$$

Comparando la expresiones (3) y (4) es posible sabe que, al elegir $\delta = \epsilon/4$ es posible satisfacer las condiciones para la existencia del límite. De esta manera, se puede elegir a ϵ tan pequeño como se quiera y la definición del límite se va a seguir cumpliendo. Así, se demuestra que $\lim_{x \to 1}(4x-1) = 3$.

4.5. Límite por definición 2

Demostrar que $\lim_{x \to 0}(7x+2) = 2$ utilizando la definición de límite ϵ-δ.

De manera análoga al ejemplo anterior, hay que demostrar la existencia de algún δ para el que

$$0 < |x| < \delta \tag{3}$$

cumpliéndose que

$$|(7x+2)-2| < \epsilon.$$

De esta manera,

$$\begin{aligned} |7x| = 7|x| &< \epsilon \\ |x| &< \frac{\epsilon}{7}. \end{aligned} \tag{4}$$

Con esto, al elegir $\delta = \epsilon/7$ se asegura el cumplimiento de la definición del límite. Se deja como ejercicio para el lector la comprobación de la definición del límite al elegir $\delta = \epsilon/7$.

5. Ejercicios

1. Halle el límite cuando x tiende a -2 de la función definida a continuación:

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}.$$

2. Obtenga el límite cuando x tiende a 0 de la función que se define a trozos:

$$h(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0. \end{cases}$$

¿Existe una discontinuidad en $x = 0$?

6. Conclusiones

Los límites son el paso previo a la definición de los conceptos más importantes del cálculo: la derivada y la integral. Aquí es cuando se empieza a lidiar con los llamados *infinitésimos*, que no son más que pequeñísimas cantidades que son muy cercanas a cero pero si llegar a tomar el valor de cero. La definición formal del límite utilizando δ y ϵ nos proporciona ese primer acercamiento para entender cómo es posible llegar al valor límite de una función sin llegar a evaluar la función en un punto específico. El lector podrá encontrar en la WEB una enorme cantidad de recursos y ejercicios para la resolución de toda clase de límites. Dentro de este Blog, en documentos posteriores, se tratarán los diferentes tipos de límites así como algunas de sus aplicaciones.