Identidades Trigonométricas

PROGRAMA DE ACOMPAÑAMIENTO EN MATEMÁTICAS[1]

Universidad Tecnológica de Pereira

Resumen

Este documento reúne de forma organizada las principales identidades trigonométricas, abarcando las identidades fundamentales, tales como las identidades reciprocas, las identidades del cociente y las identidades pitagóricas. Cada una de ellas no solo se presenta, sino que también se explica de manera detallada su origen y derivación, con el objetivo de que el estudiante comprenda de forma más matemática y demostrativa por qué estas fórmulas son correctas. Este enfoque busca que, al utilizarlas, el estudiante no solo las aplique de memoria, sino que entienda su fundamento lógico y la relación que existe entre las funciones trigonométricas. Finalmente, el documento ofrece ejercicios resueltos que sirven como guía de aprendizaje y problemas propuestos para reforzar la práctica y consolidar el conocimiento adquirido.

Introducción

La trigonometría es una de las ramas más importantes de las matemáticas, pues permite relacionar ángulos y longitudes de los triángulos, y tiene aplicaciones en áreas como la física, la ingeniería y la computación. Sin embargo, para poder trabajar con ella de manera eficiente, es fundamental dominar las identidades trigonométricas, que son igualdades que relacionan entre sí las funciones seno, coseno, tangente y sus recíprocas.

En este documento se presentan las identidades más importantes de forma ordenada y comprensible, abarcando las identidades fundamentales, ya antes mencionadas. Además de exponer cada identidad, se muestra paso a paso de dónde provienen y cómo se demuestran, con el fin de que el estudiante desarrolle una comprensión profunda y no se limite a memorizarlas. Finalmente, se incluyen ejercicios resueltos y propuestos para que el lector pueda practicar y afianzar lo aprendido.

Objetivos del documento:

- Presentar de manera clara y organizada las principales identidades trigonométricas, mostrando su deducción y aplicación para que el estudiante pueda comprenderlas, utilizarlas y relacionarlas correctamente al resolver problemas.
- Mostrar ejemplos resueltos paso a paso que faciliten la comprensión de cada identidad.
- Proporcionar ejercicios propuestos para que el estudiante practique y consolide lo aprendido.
- Fomentar la interpretación geométrica y algebraica de las identidades, para que el estudiante entienda por qué funcionan y pueda aplicarlas de forma consciente y no mecánica.

Definiciones:

- ### Identidades trigonométricas fundamentales

Una identidad trigonométrica es una relación de igualdad entre funciones trigonométricas, que se cumplen para cualquier valor del ángulo para el que ambas partes de la ecuación están definidas. Las identidades trigonométricas nos permiten plantear una misma expresión de diferentes formas. Por ejemplo, para simplificar expresiones algebraicas, utilizamos la factorización, denominadores comunes, etc. Sin embargo, para simplificar expresiones trigonométricas utilizaremos estas técnicas en conjunto con las identidades trigonométricas.

➢ Clases de Identidades Trigonométricas

Antes de definir las identidades trigonométricas fundamentales, toca recordar la relación que existe entra las funciones trigonométricas, el triángulo rectángulo que forman y el circulo unitario.

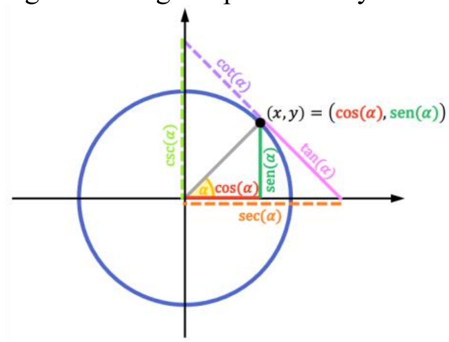

Figura 1. El circulo unitario y sus funciones trigonométricas.

Por lo tanto, definimos la relación entre las funciones trigonométricas y el circulo unitario, como:

$$sen\,\theta = \frac{y}{r} \quad ; \quad cos\,\theta = \frac{x}{r}$$

$$tan\,\theta = \frac{y}{x} \quad ; \quad cot\,\theta = \frac{x}{y}$$

$$sec\,\theta = \frac{r}{x} \quad ; \quad csc\,\theta = \frac{r}{y}$$

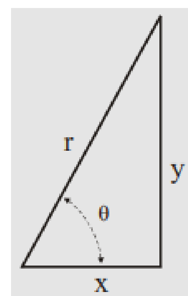

figura 31

Figura 2. Relación entre un triángulo rectángulo y las funciones trigonométricas.

➢ Identidades Recíprocas

Como podemos observar en la figura 2, las funciones trigonométricas se definen como la relación entre los catetos y su hipotenusa, respecto al ángulo θ. Ahora bien, es importante tener en cuenta esta relación para poder definir que son las identidades reciprocas de las funciones trigonométricas, es decir, las funciones trigonométricas que son inversas multiplicativas entre sí.

En matemáticas, un número es inverso de otro, respecto de cierta operación, si al operar ambos entre sí dan como resultado el elemento neutro de la operación. Por ejemplo, en la multiplicación, el **elemento neutro** de la operación sería el uno, ya que al multiplicar uno por cualquier otro número, me da como resultado el mismo. Así, el inverso multiplicativo de 9 sería 1/9, ya que: $9 \cdot \frac{1}{9} = 1$. Por lo tanto, a los inversos, en la multiplicación, también se les puede llamar **recíprocos.**
Por otra parte, cabe recordar que si un número n es el inverso multiplicativo de otro número m, lo que significa $n \cdot m = 1$, entonces se puede reescribir de la siguiente manera:

$$n = \frac{1}{m} \;\; o\; bien \;\; m = \frac{1}{n}$$

Con esta idea en mente, si nosotros observamos las funciones trigonométricas, podemos evidenciar lo siguiente:

- **Para seno y cosecante:**

$$sen(\theta) = \frac{y}{r} \;\; y \;\; \csc(\theta) = \frac{r}{y}$$

$$Entonces: \; \frac{y}{r} \cdot \frac{r}{y} = 1$$

$$Es\ decir: \; sen(\theta) \cdot \; \csc(\theta) = 1$$

Por lo tanto, podemos concluir que, $\csc(\theta)$ es reciproco de $sen(\theta)$ y viceversa:

$$\boxed{sen(\theta) = \frac{1}{\csc(\theta)} \;\; y \;\; \csc(\theta) = \frac{1}{sen(\theta)}}$$

- **Para coseno y secante:**

$$cos(\theta) = \frac{x}{r} \;\; y \;\; \sec(\theta) = \frac{r}{x}$$

$$cos(\theta) \cdot \; \sec(\theta) = \frac{x}{r} \cdot \frac{r}{x} = 1$$

Por consiguiente, $\cos(\theta)$ es reciproco de $sec(\theta)$ y viceversa:

$$\boxed{\cos(\theta) = \frac{1}{\sec\,(\theta)} \;\; y \; \sec(\theta) = \frac{1}{\cos\,(\theta)}}$$

- **Para tangente y cotangente:**

$$tan(\theta) = \frac{y}{x} \;\; y \;\; \cot(\theta) = \frac{x}{y}$$

$$tan(\theta) \cdot \; \cot(\theta) = \frac{y}{x} \cdot \frac{x}{y} = 1$$

Concluimos que, $\cot(\theta)$ es reciproco de $tan(\theta)$ y viceversa:

$$\boxed{\tan(\theta) = \frac{1}{\cot\,(\theta)} \;\; y \; \cot(\theta) = \frac{1}{\tan\,(\theta)}}$$

En conclusión, las **identidades recíprocas** nos permiten expresar cada función trigonométrica en términos de su recíproca. Esto es muy útil porque nos da más herramientas para **reescribir y simplificar expresiones trigonométricas** de diferentes maneras. Dominar estas identidades facilitará la resolución de ecuaciones trigonométricas, la simplificación de fracciones y el desarrollo de problemas más avanzados que veremos más adelante.

➢ Identidades de cociente

Las identidades de cociente muestran la relación fundamental que existe entre las funciones seno y coseno, ya que, como se puede observar en la figura 1, la tangente se puede reescribir como la razón entre el cateto adyacente y el cateto opuesto:

$$\frac{sen(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{yr}{xr} = \frac{y}{x} = \tan(\theta)$$

E inversamente, dividiendo el coseno entre el seno se obtiene:

$$\frac{\cos(\theta)}{\text{sen}(\theta)} = \frac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}} = \frac{xr}{yr} = \frac{x}{y} = \cot(\theta)$$

De manera que las siguientes dos fórmulas, llamadas identidades de cociente, son:

$$\frac{sen(\theta)}{\cos(\theta)} = \tan(\theta)$$

$$\frac{cos(\theta)}{\text{sen }(\theta)} = \cot\,(\theta)$$

➢ Identidades Pitagóricas

Las identidades pitagóricas son un conjunto de fórmulas fundamentales en trigonometría que relacionan las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente, y se derivan directamente del Teorema de Pitágoras aplicado al círculo unitario.

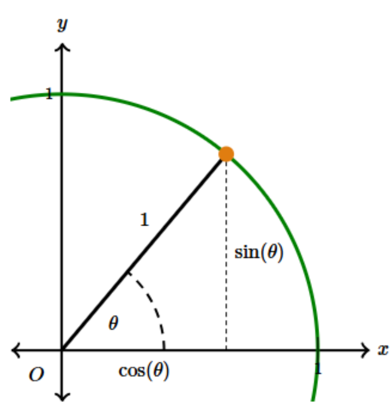

Figura 3. Identidades pitagóricas

La principal identidad pitagórica trigonométrica, es la identidad que relaciona la función seno y coseno con la unidad:

$$sen^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$$

Para demostrar de donde proviene esta identidad, utilizamos la definición elemental de las funciones trigonométricas:

$$sen^2(\theta) + \cos^2(\theta) = \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2$$

$$= \frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2}$$

$$= \frac{1}{r^2}(y^2 + x^2)$$

Como se puede observar en la figura 3, la relación entre las funciones seno y coseno respecto a la hipotenusa, forman un triángulo rectángulo, así que, podemos aplicar el teorema de Pitágoras, que nos dice que la suma de los cuadrados de los catetos es el cuadrado de la hipotenusa, es decir: $y^2 + x^2 = r^2$, por lo tanto:

$$sen^2(\theta) + \cos^2(\theta) = \frac{1}{r^2}(y^2 + x^2) = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

Por lo que concluimos, lo siguiente:

$$\boxed{sen^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1}$$

Ahora, para obtener las otras identidades pitagóricas, se hace un procedimiento sencillo. Si dividimos todo entre el cuadrado del seno, nos queda:

$$sen^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{sen^2\theta} = \frac{1}{sen^2(\theta)}$$

Utilizando las identidades recíprocas y de cociente, obtenemos:

$$\boxed{1 + \cot^2(\theta) = \csc^2(\theta)}$$

Para la última identidad, dividimos ahora por el cuadrado del coseno:

$$sen^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{cos^2\theta} = \frac{1}{cos^2(\theta)}$$

$$\boxed{\tan^2(\theta) + 1 = \sec^2(\theta)}$$

Matemáticamente todas estas identidades representan que, todas las funciones trigonométricas son diferentes formas de describir la misma relación geométrica, y conocer una de ellas nos permite expresar o calcular las demás. Esta conexión es fundamental en trigonometría, ya que nos brinda múltiples caminos para simplificar expresiones, resolver problemas y comprobar resultados.

➢ Ejercicios de las Identidades trigonométricas fundamentales:

- **Ejercicio 1:** Sabiendo que se cumple lo siguiente, $\boldsymbol{sen\,\alpha = \frac{3}{5}}$ y que $\mathbf{90° < \boldsymbol{\alpha} < 180°}$, calcule las restantes razones trigonométricas del ángulo $\boldsymbol{\alpha}$.

- **Solución:** Obtengamos las demás funciones evaluadas en dicho ángulo. Empezamos con la relación de $\mathbf{csc}(\boldsymbol{\alpha})$, ya que se puede obtener directamente utilizando la identidad recíproca:

$$\boldsymbol{\csc\alpha = \frac{1}{sen\,\alpha} = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}}$$

Ahora, utilizando la identidad principal pitagórica, podemos obtener coseno. Sin embargo, notemos que por el intervalo en que está definido α, se cumple que el coseno es negativo:

$$sen^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

$$cos^2(\alpha) + \frac{3^2}{5^2} = 1$$

$$cos^2(\alpha) + \frac{9}{25} = 1$$

$$cos^2(\alpha) = 1 - \frac{9}{25}$$

$$cos^2(\alpha) = \frac{16}{25}$$

$$cos(\alpha) = -\sqrt{\frac{16}{25}}$$

$$\cos(\alpha) = -\frac{4}{5}$$

Ya que tenemos el coseno, podemos obtener $\sec(\alpha)$ directamente:

$$\sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)} = \frac{1}{\frac{-4}{5}} = -\frac{5}{4}$$

Ya solo nos falta obtener tangente y cotangente, estas dos las conseguimos partiendo de las identidades de cociente:

$$\tan(\alpha) = \frac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

$$\cot(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\text{sen}(\alpha)} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

- **Ejercicio 2:** Verifique que la identidad $\frac{\sec^2(\alpha)-1}{\sec^2(\alpha)} = sen^2(\alpha)$
- **Solución:** Recordando la identidad: $\tan(\alpha)^2 + 1 = \sec^2(\alpha)$:

$$\frac{\sec^2(\alpha) - 1}{\sec^2(\alpha)} = \frac{(\tan^2(\alpha) + 1) - 1}{\sec^2(\alpha)}$$

$$\frac{\tan^2(\alpha)}{\sec^2(\alpha)} = \tan^2(\alpha) \cdot \frac{1}{\sec^2(\alpha)}$$

Recordando las identidades: $\sec(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)}$ y $\frac{sen(\theta)}{\cos(\theta)} = \tan(\theta)$, entonces:

$$tan^2(\alpha) \cdot cos^2(\alpha) = \frac{sen^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} \cdot \cos^2(\alpha)$$

$$= \frac{sen^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} \cdot \cos^2(\alpha)$$

$$= sen^2(\alpha)$$

- **Ejercicio 3:** Verifique la identidad $(1-\cos^2\alpha)(1+\cot^2\alpha) = 1$
- **Solución**: Trabajaremos el lado izquierdo de la ecuación:

$$(1-\cos^2\alpha)(1+\cot^2\alpha) = (1-\cos^2\alpha)\left(1+\frac{\cos^2\alpha}{sen^2\alpha}\right)$$

Podemos reescribir a 1 como:

$$= (1-\cos^2\alpha)\left(\frac{sen^2\alpha}{Sen^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{sen^2\alpha}\right)$$

$$= (1-\cos^2\alpha)\left(\frac{sen^2\alpha + \cos^2\alpha}{Sen^2\alpha}\right)$$

$$(sen^2\alpha)\left(\frac{1}{sen^2\alpha}\right) = 1$$

- ## **Ejercicios para el estudiante**:

➢ En los siguientes ejercicios, simplifique la primera expresión trigonométrica al escribir la forma simplificada en términos de la segunda expresión:

1. $\frac{\tan\alpha+\cot\alpha}{\csc\alpha} = \cos\alpha$
2. $\frac{\sec\alpha+\csc\alpha}{1+\tan\alpha} = \text{sen}\alpha$
3. $\frac{\cos\alpha}{1+sena} + \tan\alpha = \cos\alpha$
4. $\frac{1}{sen\alpha\cdot\cos\alpha} - \cot\alpha = \cot\alpha$
5. $\frac{1}{1-\cos\alpha} - \frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \csc\alpha$

- ## **Conclusión:**

En este documento se repasaron las principales identidades trigonométricas, mostrando cómo se conectan entre sí y cómo se pueden deducir a partir de relaciones geométricas como el círculo unitario y el teorema de Pitágoras. Se presentaron las identidades recíprocas, de cociente y pitagóricas, todas acompañadas de explicaciones paso a paso y ejemplos resueltos para reforzar su comprensión.

El estudio de estas identidades permite entender que las funciones trigonométricas no son fórmulas aisladas, sino distintas formas de expresar la misma relación geométrica. Esta visión ayuda a simplificar expresiones, resolver ecuaciones y encontrar valores exactos de manera más intuitiva y segura.

Recomendaciones para el estudiante: para trabajar los ejercicios es útil primero identificar qué tipo de identidad podría simplificar la expresión y reescribir paso a paso usando transformaciones equivalentes. Finalmente, dedica tiempo a practicar varios ejercicios, ya que la agilidad y la confianza en trigonometría se adquieren principalmente con la práctica constante.

- **Referencias:**

- OpenStax – Precálculo 2ed. “7.3 Fórmulas del ángulo doble, el ángulo medio y la reducción”. (2022, 27 de abril). *OpenStax*. https://openstax.org/books/prec%C3%A1lculo-2ed/pages/7-3-formulas-del-angulo-doble-el-angulo-medio-y-la-reduccion OpenStax
- Khan Academy. *Trigonometry: unit circle symmetry* [Video]. Khan Academy. (s. f.). https://es.khanacademy.org/math/trigonometry/trig-equations-and-identities/trig-identities/v/trigonometry-unit-circle-symmetry Khan Academy