Funciones Trigonométricas

PROGRAMA DE ACOMPAÑAMIENTO EN MATEMÁTICAS[1]

[1]Universidad Tecnológica de Pereira

Resumen

En este documento se estudian las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente, destacando sus propiedades principales y la forma en que se representan gráficamente. Se explicará cómo estas funciones surgen del círculo unitario, cuáles son sus características visuales más importantes, como el período, la amplitud y la simetría, y cómo dichas propiedades influyen en su gráfica. Finalmente, se incluyen ejemplos prácticos y ejercicios para afianzar la comprensión del tema.

1. Introducción

Las funciones trigonométricas son fundamentales en las matemáticas, especialmente en el estudio de fenómenos periódicos y en la modelación de situaciones reales como ondas, movimientos y vibraciones. Entre ellas, las más utilizadas son el seno, coseno y tangente, ya que describen relaciones geométricas y comportamientos repetitivos en el tiempo.

Objetivos del documento:

- Presentar las propiedades visuales de las funciones seno, coseno y tangente.
- Explicar cómo graficarlas de manera sencilla a partir del círculo unitario.
- Desarrollar ejemplos que permitan reconocer patrones en sus gráficas.

El estudio de estas funciones no solo tiene aplicación en matemáticas, sino también en física, ingeniería y ciencias aplicadas, lo que resalta su importancia dentro de la formación universitaria.

2. Definición

2.1. Funciones seno y coseno a partir del círculo unitario

Para definir las funciones trigonométricas, empezamos con el **círculo unitario**, que es un círculo de radio 1 centrado en el origen del plano cartesiano. Si tomamos un ángulo t (en radianes), este ángulo **corta** al círculo en un punto, y la longitud del arco que forma es s. Como la fórmula del arco es $s = r \cdot t$, y el radio es 1, tenemos que en el círculo unitario se cumple $s = t$.

El plano de coordenadas se divide en cuatro regiones llamadas **cuadrantes** (I, II, III y IV), siguiendo el recorrido de los ángulos positivos en sentido antihorario. Para cualquier ángulo t, el punto donde el lado terminal del ángulo **toca** al círculo tiene coordenadas (x, y). Esas coordenadas son muy importantes porque:

$$x = \cos(t), \quad y = \sin(t)$$

En otras palabras, el coseno de un ángulo es la coordenada en x, y el seno es la coordenada en y de ese punto del círculo unitario.

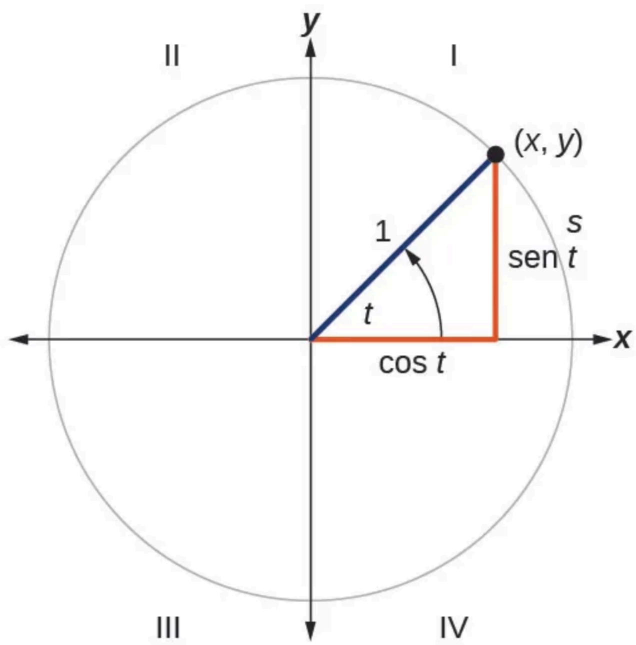

Figura 1: Círculo unitario donde el ángulo central es t radianes.

2.2. Definición de las funciones seno y coseno

Una vez marcado el círculo unitario, podemos ver cómo las coordenadas (x, y) se relacionan con la longitud del arco y el ángulo. La **función seno** asocia un ángulo t con la coordenada y del punto donde el lado terminal del ángulo **toca** el círculo unitario. En otras palabras, el seno de un ángulo t es el valor y del punto final en el círculo unitario para un arco de longitud t.

$$\sin(t) = y$$

La **función coseno** de un ángulo t corresponde a la coordenada x del mismo punto en el círculo unitario.

$$\cos(t) = x$$

De esta manera, cada ángulo t tiene asociado un punto (x, y) en el círculo unitario, y las funciones seno y coseno toman como valores esas coordenadas.

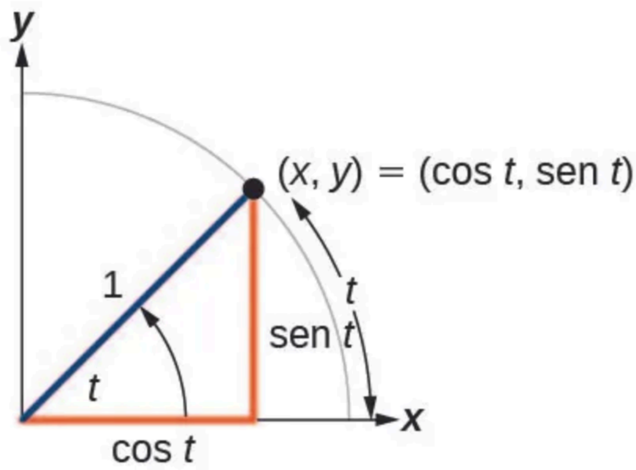

Figura 2: Seno y Coseno en el circulo unitario.

Dado que el seno y el coseno son funciones, no siempre es necesario escribir los paréntesis: $\sin t = \sin(t)$, $\cos t = \cos(t)$. También es común usar la notación abreviada: $\cos^2 t$ en lugar de $(\cos(t))^2$. Sin embargo, es importante tener cuidado: muchas calculadoras y programas no reconocen esta forma abreviada. Para evitar errores, siempre se recomienda usar paréntesis al ingresar operaciones en la calculadora o en la computadora y tener en cuenta si se está trabajando en grados o en radianes.

2.3. Signo de las funciones según el cuadrante

En el círculo unitario, el valor de las funciones seno y coseno depende del cuadrante en el que se encuentre el ángulo:

- **Primer cuadrante (I):** $\sin(t) > 0$, $\cos(t) > 0$
- **Segundo cuadrante (II):** $\sin(t) > 0$, $\cos(t) < 0$
- **Tercer cuadrante (III):** $\sin(t) < 0$, $\cos(t) < 0$
- **Cuarto cuadrante (IV):** $\sin(t) < 0$, $\cos(t) > 0$

Esto ocurre porque el seno corresponde a la coordenada y del punto en el círculo unitario, mientras que el coseno corresponde a la coordenada x. Según el cuadrante, x y y serán positivos o negativos.

2.4. Gráficas de seno, coseno y tangente

La función seno se puede representar como una onda periódica en el plano cartesiano. Se define como: $f(x) = \sin(x)$. Su **dominio** es $\mathbb{R}$ (todos los números reales) y su **rango** es $[-1, 1]$. La gráfica de $y = \sin(x)$ es una curva ondulada que se repite cada 2π unidades, alcanzando su valor máximo en 1 y mínimo en -1.

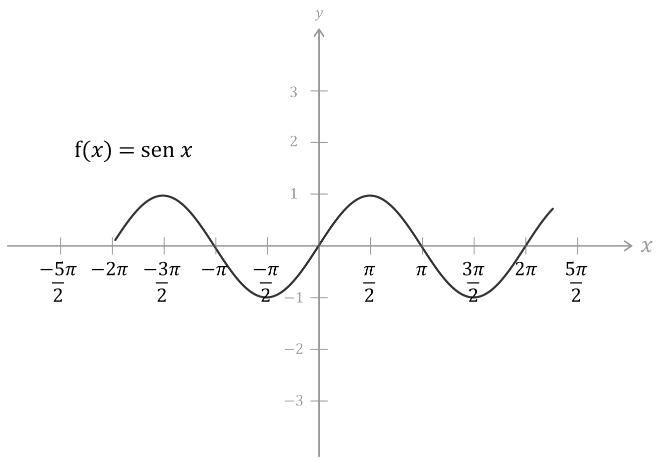

Figura 3: Gráfica de la función Seno.

De manera análoga, la función coseno se representa como: $f(x) = \cos(x)$, con **dominio** $\mathbb{R}$ y **rango** $[-1, 1]$. La gráfica de $y = \cos(x)$ también es una onda periódica que se repite cada 2π, comenzando en el valor máximo 1 cuando $x = 0$.

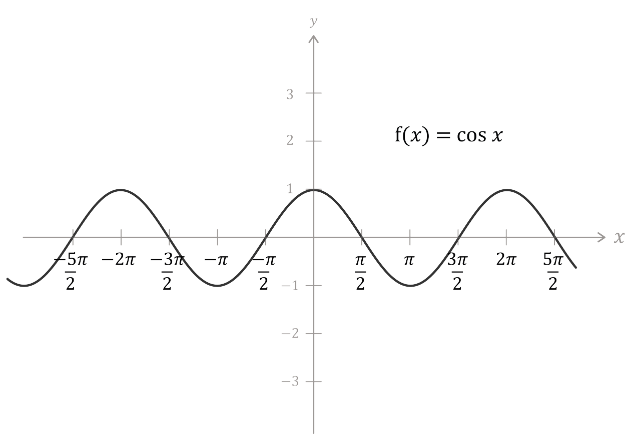

Figura 4: Gráfica de la función Coseno.

Función tangente: Se define como $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Su dominio excluye los valores donde $\cos(x) = 0$, es decir, $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$. Su rango es $\mathbb{R}$.

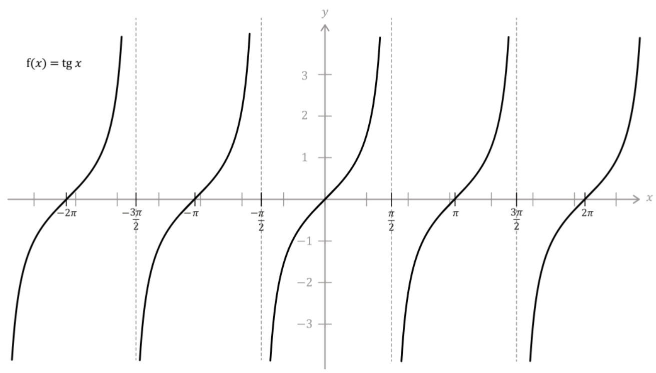

Figura 5: Gráfica de la función Tangente.

2.5. Propiedades visuales principales:

- **Seno y coseno** tienen período 2π, amplitud de 1 y son funciones acotadas.
- **Tangente** tiene período π, no está acotada y presenta asíntotas verticales.
- **Simetría:**
  - Seno es función impar, esto significa que su gráfica es simétrica respecto al origen: $\sin(-x) = -\sin(x)$.
  - Coseno es función par, esto significa que su gráfica es simétrica respecto al eje y: $\cos(-x) = \cos(x)$.
  - Tangente es función impar: $\tan(-x) = -\tan(x)$.

3. Ecuaciones

Las ecuaciones generales de las funciones trigonométricas se escriben como:

$$y = a\sin(bx + c) + d$$

$$y = a\cos(bx + c) + d$$

$$y = a\tan(bx + c) + d$$

donde:

- a: amplitud (altura máxima de la onda, excepto en tangente).
- b: determina el período de la función $\left(\frac{2\pi}{b}\right.$ para seno y coseno, $\left.\frac{\pi}{b}\right.$ para tangente$\left.\right)$.
- c: desplazamiento horizontal (fase).
- d: desplazamiento vertical.

4. Ejemplos

4.1. Ejemplo 1: Gráficar función seno

Sea

$$f(x) = 2\sin\left(0{,}5x - \tfrac{\pi}{4}\right)$$

Identificar parámetros:

- Amplitud: $|a| = 2$
- Período: $T = \dfrac{2\pi}{b} = \dfrac{2\pi}{0{,}5} = 4\pi$
- Desplazamiento horizontal (fase): $\varphi = -\dfrac{c}{b} = -\dfrac{-\pi/4}{0{,}5} = \frac{\pi}{2}$
- Línea media: $y = 0$

Paso a paso:

1. La función empieza en $x = \frac{\pi}{2}$ (fase positiva).
2. El período es $T = 4\pi$, así que un ciclo completo va desde $x = \frac{\pi}{2}$ hasta $x = \frac{\pi}{2} + 4\pi = \frac{9\pi}{2}$
3. Dividimos el período en 4: $T/4 = \pi$. Esto nos da los puntos clave en el eje x:

$$\tfrac{\pi}{2},\ \tfrac{3\pi}{2},\ \tfrac{5\pi}{2},\ \tfrac{7\pi}{2},\ \tfrac{9\pi}{2}$$

4. Conociendo que es una función seno, sabemos que en esos valores la gráfica pasa por: inicio en la línea media, máximo, línea media, mínimo y vuelve a la línea media.
5. Se dibuja la curva del seno con amplitud 2 y se repite el patrón periódicamente.

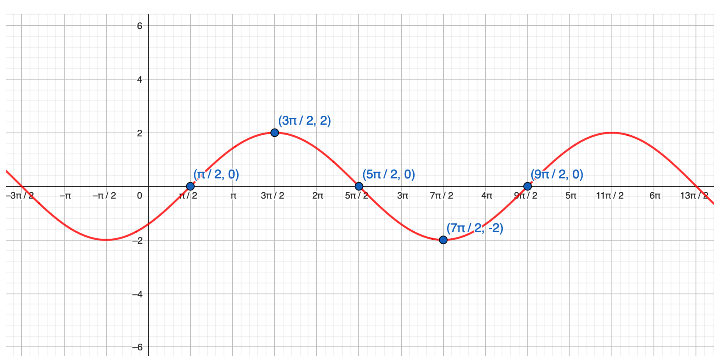

Figura 6: Gráfica Ejemplo 1 (seno).

4.2. Ejemplo 2: Gráficar función coseno

Sea

$$g(x) = -\cos\left(2x + \tfrac{\pi}{3}\right)$$

Identificar parámetros:

- Amplitud: $|a| = 1$
- Período: $T = \dfrac{2\pi}{b} = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$
- Desplazamiento horizontal (fase): $\varphi = -\dfrac{c}{b} = -\dfrac{\pi/3}{2} = -\frac{\pi}{6}$
- Línea media: $y = 0$

Paso a paso:

1. La función empieza en $x = -\frac{\pi}{6}$ (fase negativa).
2. El período es $T = \pi$, así que un ciclo va desde $x = -\frac{\pi}{6}$ hasta $x = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6}$
3. Dividimos el período en 4: $T/4 = \frac{\pi}{4}$. Los puntos clave en x son:

$$-\tfrac{\pi}{6},\ \tfrac{\pi}{12},\ \tfrac{\pi}{3},\ \tfrac{7\pi}{12},\ \tfrac{5\pi}{6}$$

4. Como es un coseno invertido ($a < 0$), la curva empieza en un mínimo, luego sube a la línea media, alcanza un máximo, vuelve a la línea media y termina en un mínimo.
5. Se dibuja la curva de coseno invertido y se repite el patrón cada π.

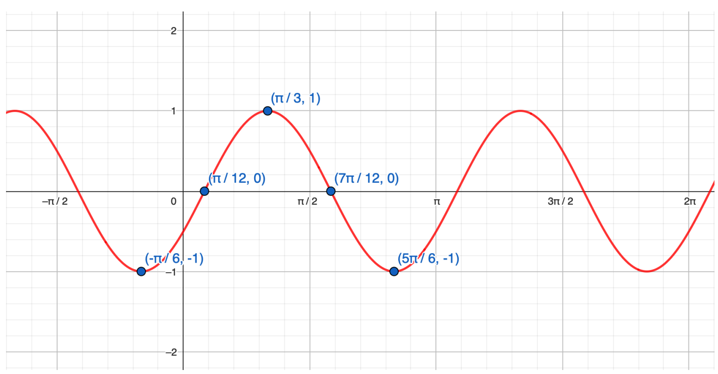

Figura 7: Gráfica Ejemplo 2 (coseno).

4.3. Ejemplo 3: Gráficar función tangente

Sea

$$h(x) = \tan\left(2x - \tfrac{\pi}{4}\right)$$

Identificar parámetros:

- $b = 2,\ c = -\frac{\pi}{4},\ d = 0$
- Período: $T = \dfrac{\pi}{b} = \dfrac{\pi}{2}$

- Desplazamiento horizontal (fase): $\varphi = -\dfrac{c}{b} = \dfrac{\pi}{8}$
- Línea media: $y = 0$

Cálculos clave (sólo en x):

- Cero principal:
$$x_0 = \varphi = \frac{\pi}{8}$$
- Asíntotas (fórmula):
$$x = \varphi \pm \frac{T}{2} + kT$$
Sustituyendo
$$x = \frac{\pi}{8} \pm \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$$
Para $k = 0$:
$$x = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{8}$$
$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{8}$$

Paso a paso:

1. Marcar en el eje x las asíntotas (se repiten cada T).
2. Marcar el cero en $x = \varphi$.
3. Dividir el periodo en 4 si se desea: $T/4$ da puntos de referencia donde tan tiene valores típicos (por ejemplo ± 1). En este caso $T/4 = \pi/8$, así que los puntos $x = \varphi \pm T/4$ son $x = 0$ y $x = \pi/4$, que verifican que dentro de la rama la función toma valores de ± 1.
4. Dibujar líneas verticales punteadas en las asíntotas, situar el cero y los puntos de referencia, y trazar la rama de la tangente que va de $-\infty$ a $+\infty$ entre las asíntotas. Repetir periódicamente.

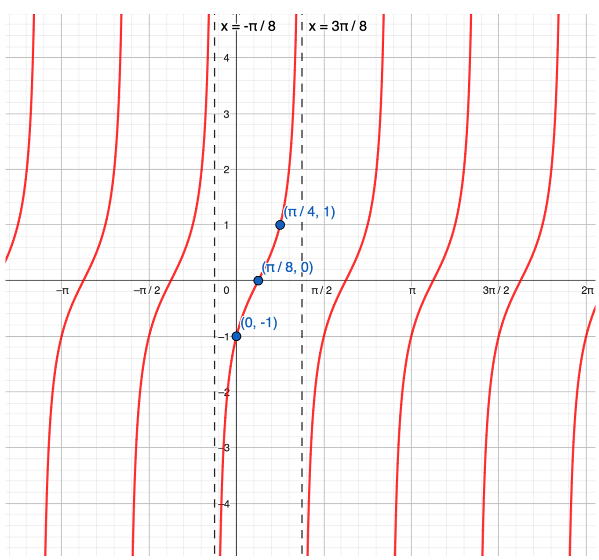

Figura 8: Gráfica Ejemplo 3 (tangente).

5. Ejercicios

A continuación, se proponen algunos ejercicios para practicar la graficación de funciones trigonométricas. En cada caso, siga los pasos: identificar los parámetros a, b, c, d, calcular el período y la fase, y luego graficar a mano marcando los puntos clave en el eje x y la amplitud en el eje y.

1. Graficar la función seno
$$f(x) = 3\sin(x) + 2.$$
(La curva tendrá la misma forma que el seno básico, pero más alta (amplitud 3) y oscilando alrededor de la línea media $y = 2$ en lugar del eje x).

2. Graficar la función coseno
$$g(x) = \cos\left(\tfrac{1}{2}x\right).$$
(Período más largo, sin fase).

3. Graficar la función seno
$$f(x) = \sin\left(x - \tfrac{\pi}{3}\right).$$
(Desplazamiento horizontal hacia la derecha).

4. Graficar la función coseno
$$g(x) = -2\cos(2x).$$
(Amplitud mayor que 1 y reflexión en el eje x).

5. Graficar la función tangente
$$h(x) = \tan\left(x + \tfrac{\pi}{6}\right).$$
(Periodo estándar, con fase positiva).

6. Graficar la función tangente
$$h(x) = \tan(0{,}5x).$$
(Periodo más largo).

Nota: En todos los ejercicios, recuerde dividir el período entre 4 para seno y coseno, y ubicar asíntotas y ceros en el caso de la tangente.

6. Conclusiones

En este recorrido aprendimos a comprender y graficar las funciones seno, coseno y tangente. Partimos de su definición en el círculo unitario y luego las representamos como funciones periódicas en el plano cartesiano, observando sus propiedades de amplitud, período, fase y línea media. Vimos que estas características determinan la forma de cada gráfica y nos permiten dibujarlas a mano paso a paso, identificando los puntos clave en el eje x y el comportamiento de la función en y.

Una idea importante es que el signo de la función depende del cuadrante en el que se encuentre el ángulo, y que el seno es impar mientras que el coseno es par, lo cual se refleja en sus simetrías gráficas. Además, entendimos que la tangente tiene un comportamiento diferente por la presencia de asíntotas verticales y que su período es distinto al de seno y coseno.

Recomendaciones para el estudiante:

- Antes de graficar, identifique siempre los parámetros a, b, c, d para conocer la amplitud, el período, la fase y la línea media.
- Dibuje primero la línea media y marque los puntos clave en el eje x dividiendo el período entre 4 (para seno y coseno).
- En el caso de la tangente, ubique los ceros y asíntotas primero; luego trace la rama de la curva.
- Use papel cuadriculado para mayor precisión y recuerde que, una vez entendido el procedimiento, las gráficas se pueden construir sin necesidad de calcular cada punto.
- Practique con varios ejemplos: la repetición le permitirá reconocer patrones y ganar seguridad al graficar.

En conclusión, las funciones trigonométricas no son solo expresiones algebraicas: sus gráficas nos muestran visualmente el comportamiento periódico de muchos fenómenos en matemáticas, física e ingeniería. Comprender su representación gráfica ayuda a fortalecer la intuición matemática y a preparar el camino para temas más avanzados.

7. Referencias

Referencias

[1] Evulpo. (s.f.). *Funciones trigonométricas*. Recuperado de evulpo.com

[2] OpenStax. (2021). *Círculo unitario: funciones seno y coseno*. En *Precálculo, 2a edición*. Recuperado de `https://openstax.org/books/precálculo-2ed/pages/5-2-circulo-unitario-funciones-seno-y-coseno`