UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA
Facultad de Ciencias Básicas – Depto. de Matemáticas

Taller No. 4 de Álgebra Lineal

Tema: Espacios vectoriales

Nombre: ____________________ Código:________________ Grupo: ___

Fecha: ________________

ESPACIOS VECTORIALES

1. Se definen en $V = \mathcal{M}_2$, las operaciones $\oplus$ y $\odot$ de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e-1 & b+f \\ c+g & d+h-1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \lambda \odot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a - \lambda + 1 & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d - \lambda + 1 \end{pmatrix}.$$

a) Halle el elemento neutro para la suma $\oplus$ y el opuesto aditivo $\ominus \mathbf{u}$ para cada $\mathbf{u} \in V$.

b) Verifique la propiedad

$$(\lambda + \beta) \odot \mathbf{u} = \lambda \odot \mathbf{u} \oplus \beta \odot \mathbf{u}; \ \lambda, \beta \in \mathbb{R}, \mathbf{u} \in V.$$

2. Demuestre que $H = \{\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_3 \mid \boldsymbol{A} \text{ es simétrica } \}$ es un subespacio de $V = \mathcal{M}_3$.

3. Determine el valor (o valores) de α, si existe(n), de modo que $f(t) = 1 - 2t + \alpha t^2$ esté en

$$H = \text{gen}\{f_1(t) = 1 - t^2, f_2(t) = 2 - t + t^2, f_3(t) = 1 + t - 4t^2\}.$$

4. Halle una base y determine la dimensión del subespacio de $\mathcal{M}_{23}$

$$H = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{23} \mid a + 2c = b, 2a - b + c - d = 0, f - 2e = a \right\}.$$

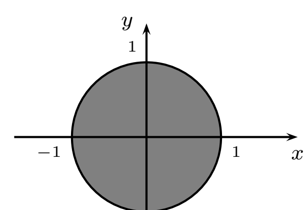
VERDADERO O FALSO

Responda verdadero o falso. **Justifique** claramente su respuesta.

1. __ $H = \{\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_n \mid \boldsymbol{A} \text{ es nilpotente con índice de nilpotencia } k\}$ es un subespacio de $V = \mathcal{M}_n$.

2. __ Sean $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ dos vectores no nulos en $\mathbb{R}^3$. Si $\vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}$, entonces $\vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{w}}$ son linealmente independientes.

3. __ Si $\boldsymbol{A}$ una matriz $m \times n$ con componentes reales, entonces $H = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}\mathbf{u} = \mathbf{0}\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

4. __ El subconjunto 

no es un subespacio de $\mathbb{R}^2$.

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$$