Universidad Tecnológica de Pereira

FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

EXAMEN FINAL UNIFICADO DE ÁLGEBRA LINEAL

Nombre: ________________________ Código: ______________ Grupo: ___

Fecha: 7 de diciembre de 2015 Tiempo: 2 horas

Responda en forma clara, ordenada y justifcando cada una de sus respuestas.

I. $\boxed{\text{5 puntos}}$ SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES Y GEOMETRÍA VECTORIAL

Determine un vector $\vec{\mathbf{v}} = (x, y, z)$ en $\mathbb{R}^3$ si se sabe que $\|\vec{\mathbf{u}}\| = 4$, el ángulo entre $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ es $\frac{\pi}{3}$, $\vec{\mathbf{u}} \bullet \vec{\mathbf{v}} = 2\sqrt{2}$ y $\vec{\mathbf{v}} \times (3, 1, 2) = (1, -1, -1)$.

II. $\boxed{\text{20 puntos}}$ ESPACIOS VECTORIALES Y TRANSFORMACIONES LINEALES.

Responda solo uno de los puntos 1 y 2. **El punto 3, no es opcional**.

1. $\boxed{5}$ Encuentre el valor o valores de α de modo que el vector $\vec{\mathbf{u}} = (1, -1, 4)$ esté en el subespacio $H = \text{gen}\{\vec{\mathbf{v}}_1 = (\alpha, -1, 1), \vec{\mathbf{v}}_2 = (1, -1, \alpha)\}$

2. $\boxed{5}$ Demostrar que $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ definida por $T(\vec{\mathbf{x}}) = \vec{\mathbf{u}} \bullet \vec{\mathbf{x}}$ es una transformación lineal, donde $\vec{\mathbf{u}}$ es un vector fijo no nulo de $\mathbb{R}^n$.

3. $\boxed{15}$ Sea $T : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^3$ una transformación lineal definida por

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y - z + 3w \\ x - 3y + 4z - 7w \\ 2x - y + 3z - 4w \end{pmatrix}$$

Determine:

a) $\boxed{4}$ El núcleo, una base $\mathcal{B}$ para el núcleo y la nulidad de T.

b) $\boxed{4}$ Una base ortonormal para el núcleo de T a partir de la base $\mathcal{B}$.

c) $\boxed{4}$ La imagen o recorrido y el rango de T.

d) $\boxed{3}$ Si el vector $\vec{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ está en la imagen de T.

III. $\boxed{\text{15 puntos}}$ VALORES Y VECTORES PROPIOS. Responda solo uno de los puntos **1** y **2**.

1. Considere la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) $\boxed{3}$ Compruebe que $\vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es un vector propio de $\boldsymbol{A}$ y determine el valor propio correspondiente.

b) $\boxed{3}$ Encuentre todos los valores propios de $\boldsymbol{A}$ si $p(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda + 2$ es el polinomio característico.

c) $\boxed{9}$ Halle una matriz ortogonal $\boldsymbol{Q}$ que diagonalice a $\boldsymbol{A}$.

2. Considere la ecuación cuadrática $x^2 + 2xy + y^2 + y^2 + 6\sqrt{2}\,x - 2\sqrt{2}\,y = -10$.

(a) $\boxed{2}$ Halle la matriz simétrica $\boldsymbol{A}$ asociada a la parte cuadrática de la ecuación.

(b) $\boxed{6}$ Encuentre una matriz ortogonal $\boldsymbol{Q}$ que diagonalice a $\boldsymbol{A}$.

(c) $\boxed{4}$ Determine la forma canónica de la cónica.

(d) $\boxed{3}$ Dibuje la gráfica identificando el ángulo de rotación y los ejes principales.

IV. $\boxed{\text{10 puntos}}$ **VERDADERO O FALSO.** Conteste verdadero o falso. <u>Justifique claramente su respuesta</u>. (<u>Respuesta sin justificar no tiene validez</u>). <u>Responda solo 5 puntos de los 8 propuestos</u>.

No.	V o F	Proposición
1.		$P(1/3, 2/3, 2/3)$ es el punto del plano $x + 2y + 2z = 3$ más cercano al origen.
2.		El área del triángulo determinado por los vectores $\vec{\mathbf{u}} = (2, 1, -2)$ y $\vec{\mathbf{v}} = (2, 2, -3)$ es $A = \frac{9}{2}$ [Unidades cuadradas].
3.		La componente $c_{3,2}$ de la matriz $\boldsymbol{C}$ es -3; donde $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$ son matrices de orden 3 tales que $\boldsymbol{A}$ es simétrica e invertible, $\boldsymbol{B}$ es ortogonal, $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}^T + \left(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1}$, la fila 3 de $\boldsymbol{A}$ es el vector $(2, -3, 2)$ y la fila 2 de $\boldsymbol{B}$ es $(-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$.
4.		La matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \beta & -5 \end{pmatrix}$ es invertible para todo α y β en $\mathbb{R}$.
5.		$H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : \ \lvert x \rvert = \lvert y \rvert \right\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^2$.
6.		El conjunto de las matrices antisimétricas es el núcleo de la transformación lineal $T : \mathcal{M}_n \mapsto \mathcal{M}_n$ definida por $T(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^T$, ($\mathcal{M}_n$ es el espacio vectorial de las matrices de orden n).
7.		Existen valores de k de modo que gen $\{(1, 2), (6, -k)\} = \mathbb{R}^2$.
8.		Existen valores de α y β de modo que $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha + \beta \\ \beta & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ es diagonalizable ortogonalmente.