EXAMEN FINAL UNIFICADO DE ÁLGEBRA LINEAL 30 %

Nombre: ______________________________ Código: ____________________ Grupo: ___

Fecha: 5 de diciembre de 2016 10:00 am Tiempo: 2 horas

Responda en forma clara, ordenada y justificando cada una de sus respuestas.

I. 9 puntos **Sistemas de ecuaciones lineales y geometría vectorial**

1. 3 ptos Hallar el valor de k de modo que el sistema de ecuaciones lineales dado, sea inconsistente

$$\begin{aligned} x + 2y + kz &= 1 \\ 2x + ky + 8z &= 3 \end{aligned}$$

Justificar geométricamente la inconsistencia.

2. 4 ptos Halle todos los vectores $\vec{\mathbf{v}} = (x, y, z)$ tales que $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{w}}$ y $\|\vec{\mathbf{v}}\| = \sqrt{6}$, donde $\vec{\mathbf{u}} = (1, 2, 1)$ y $\vec{\mathbf{w}} = (2, 1, -1)$.

3. 2 ptos Muestre que la recta $\mathcal{L} : \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-6}{2} = \dfrac{z-4}{1}$ intersecta al eje z y es paralela al plano $\pi : x - 3y + 5z = 6$.

II. 16 puntos **Espacios vectoriales y transformaciones lineales.** Responda solo uno de los puntos 1 y 2. **El punto 3 es obligatorio.**

1. 3 ptos Demuestre que $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0 \right\}$ es un subespacio de $V = \mathbb{R}^3$.

2. 3 ptos Compruebe que la función $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ definida por $T(\vec{\mathbf{v}}) = \vec{\mathbf{u}} \bullet \vec{\mathbf{v}}$, es una transformación lineal, donde $\vec{\mathbf{u}}$ es un vector fijo no nulo de $\mathbb{R}^n$.

3. 13 ptos **Sea $T : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ una transformación lineal definida por** $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y - 2z \\ 2x + 4y - 3z \\ x + 2y - 2z \end{pmatrix}$.

Determine:

(a) 4 ptos El núcleo, una base para el núcleo y su nulidad.

(b) 3 ptos El rango y la imagen de T

(c) 4 ptos Una base ortonormal para $\operatorname{im} T$.

(d) 2 ptos Si $\vec{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ pertenece al núcleo de T.

III. $\boxed{\text{15 puntos}}$ **Valores y vectores propios.**

1. Considere la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(a) $\boxed{\text{3 ptos}}$ Muestre que el polinomio caraterístico de $\boldsymbol{A}$ es $p(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 4)$.

(b) $\boxed{\text{3 ptos}}$ Compruebe que $\vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es un vector propio de $\boldsymbol{A}$.

(c) $\boxed{\text{2 ptos}}$ Halle todos los valores propios de $\boldsymbol{A}$

(d) $\boxed{\text{5 ptos}}$ Encuentre los espacios característicos de $\boldsymbol{A}$.

(e) $\boxed{\text{2 ptos}}$ Determine una matriz invertible $\boldsymbol{P}$ que diagonalice la matriz $\boldsymbol{A}$.

IV. $\boxed{\text{10 puntos}}$ **Falso o verdadero.** Conteste verdadero o falso. **Justifique claramente su respuesta**. (**Respuesta sin justificar no tiene validez**).

No.	V o F	Proposición
1.		Si $\vec{\mathbf{a}}$ y $\vec{\mathbf{b}}$ son vectores de $\mathbb{R}^3$ que forman un ángulo de $2\pi/3$, $\lVert\vec{\mathbf{a}}\rVert = 2$ y $\lVert\vec{\mathbf{b}}\rVert = \sqrt{12}$, entonces $\lVert\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}\rVert = 18$.
2.		Si $\boldsymbol{A}$ es una matriz de orden n que satisface la ecuación $\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{I} = 3\boldsymbol{A}$, entonces $\boldsymbol{A}$ es invertible.
3.		$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ -g & -h & -i \end{vmatrix}$.
4.		El polinomio $p(x) = x^2 - x - 2$ de $\mathbb{P}_2$ pertenece al espacio generado por el conjunto $\mathcal{S} = \left\{x + 1, x^2 - x, x^2 - 3x - 2\right\}$
5.		$\vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es un vector propio de $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} k & -1 & 1 \\ -1 & k & -1 \\ 1 & -1 & k \end{pmatrix}$ para cualquier k en los reales.