

# Ejemplo de diseño de árboles

Universidad Tecnológica de Pereira

Facultad de Ingeniería Mecánica

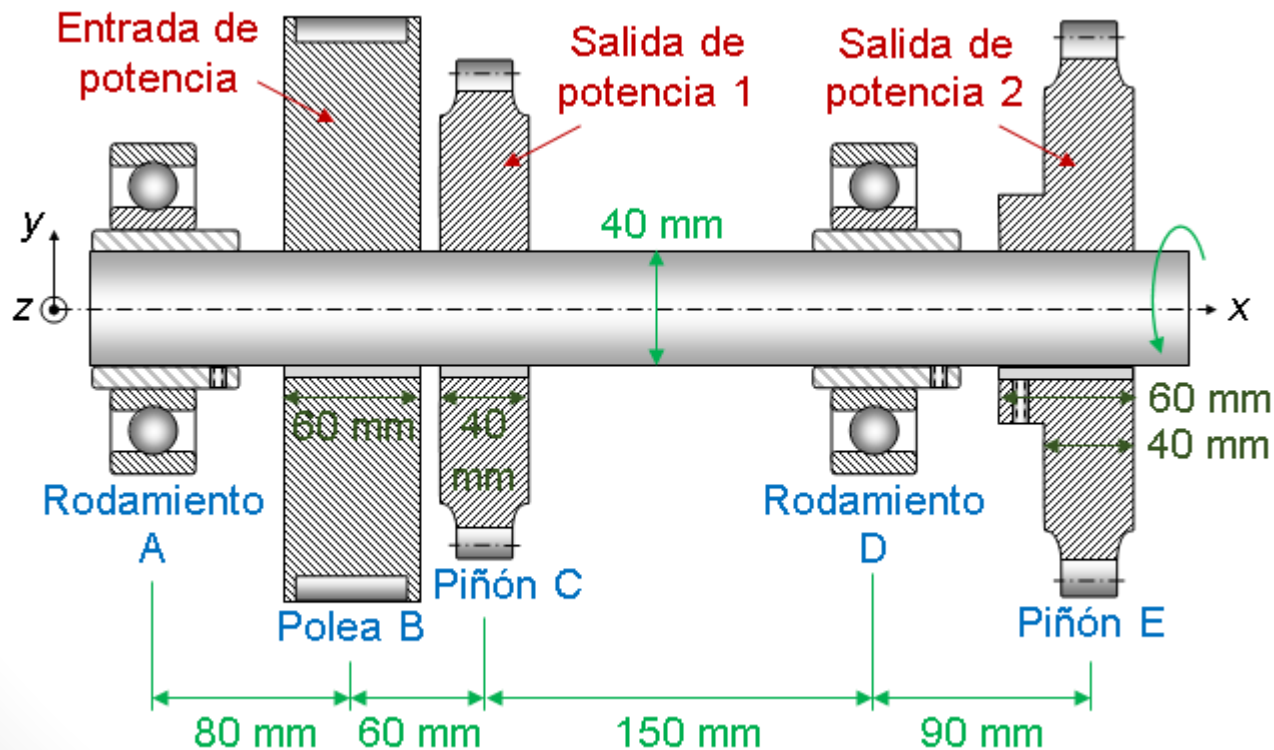
DISEÑO I

Profesor: Libardo Vanegas Useche

21 de abril de 2015

# Datos

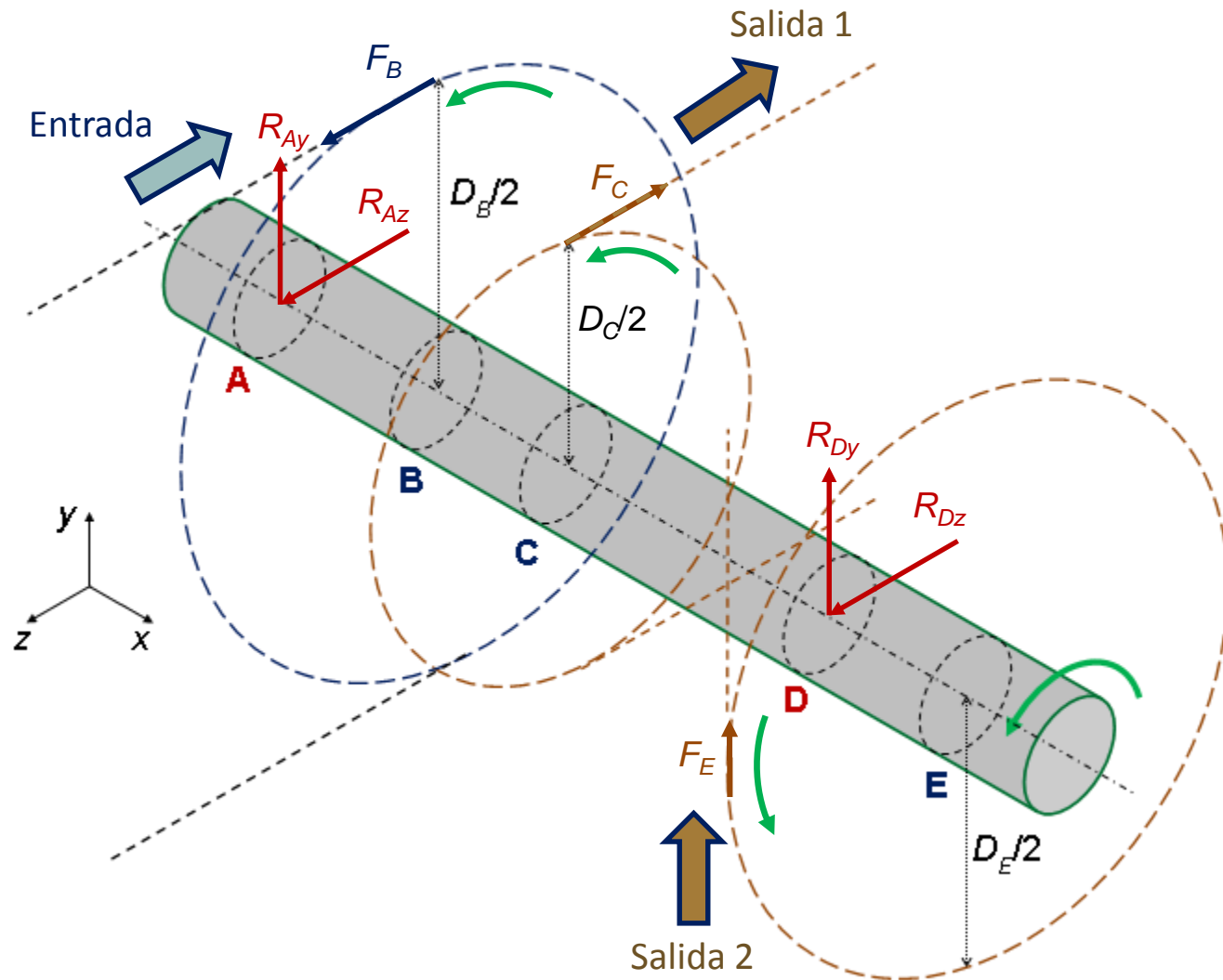
- $P_e$  (polea B): varía mayormente entre 0 y 4 kW, pero puede alcanzar picos de 9 kW
- $P_{s1}$  (estrella C) =  $0.6P_e$ ,  $P_{s2}$  (estrella E) =  $0.4P_e$
- $n = 50$  r/min, diámetros primitivos:  $D_B = 150$  mm,  $D_C = 120$  mm,  $D_E = 144$  mm
- Acero SAE 1045 laminado en caliente (árbol)
- Asuma que todas las fuerzas en los lados flojos de las cadenas y la correa son cero
- Determinar  $N_{PICO}$  y  $N_{NOM}$ . Para las cargas nominales tome una potencia de diseño constante de 4 kW. Las cargas pico no se repiten más de  $10^3$  veces



# Procedimiento

1. Diagrama de cuerpo libre
2. Pares de torsión y diagrama de par de torsión
3. Fuerzas externas
4. Diagramas de cuerpo libre
5. Ecuaciones de equilibrio y reacciones
6. Diagramas de fuerza cortante y momento flector
7. Diagramas  $T$  y  $M_R$  y secciones críticas
8. Cálculo para las cargas **pico**
9. Cálculo para las cargas de **fatiga**

# 1. Diagrama de cuerpo libre



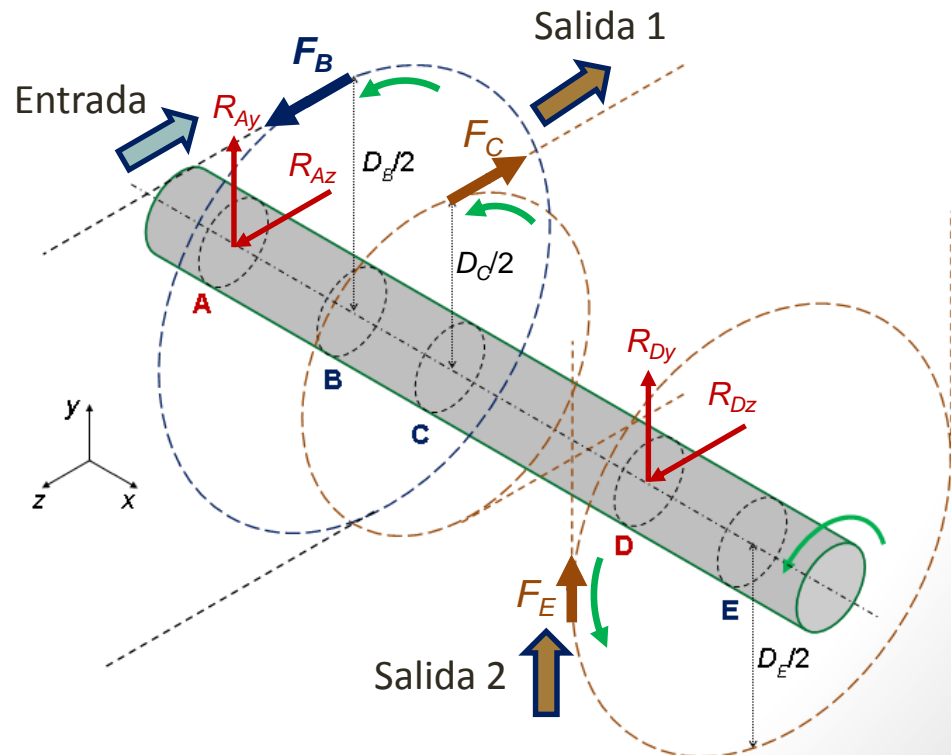
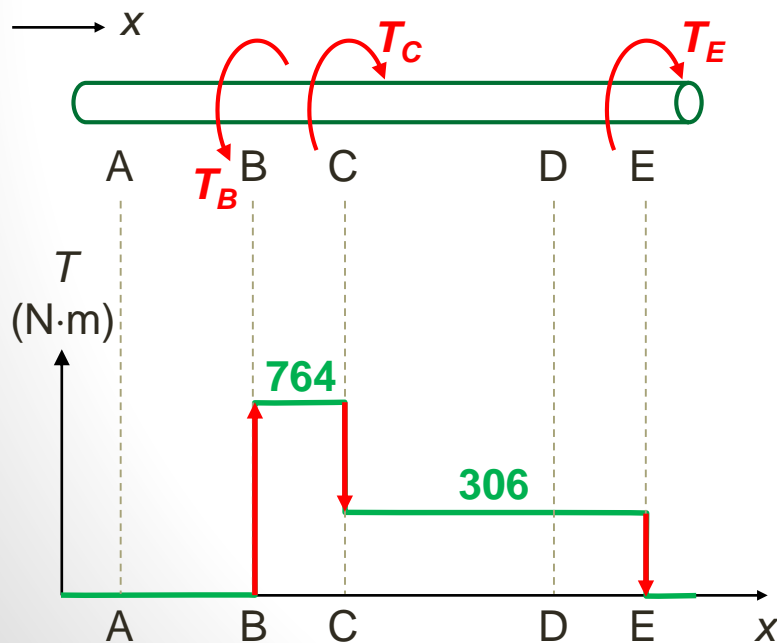
## 2. Pares de torsión ( $T$ ) y diagrama de $T$

- Para cada entrada o salida de potencia se calcula un par de torsión

$$T_B [\text{N}\cdot\text{m}] = \frac{60P_e [\text{W}]}{2\pi n [\text{min}^{-1}]} = \frac{(60)(4 \times 10^3)}{(2\pi)(50)} \text{N}\cdot\text{m} = 764 \text{N}\cdot\text{m}$$

$$T_C [\text{N}\cdot\text{m}] = \frac{60P_{s1} [\text{W}]}{2\pi n [\text{min}^{-1}]} = \frac{(60)(0.6 \times 4 \times 10^3)}{(2\pi)(50)} \text{N}\cdot\text{m} = 458 \text{N}\cdot\text{m}$$

$$T_E [\text{N}\cdot\text{m}] = \frac{60P_{s2} [\text{W}]}{2\pi n [\text{min}^{-1}]} = \frac{(60)(0.4 \times 4 \times 10^3)}{(2\pi)(50)} \text{N}\cdot\text{m} = 306 \text{N}\cdot\text{m}$$



# 3. Fuerzas externas

$$F_B \frac{D_B}{2} = T_B$$

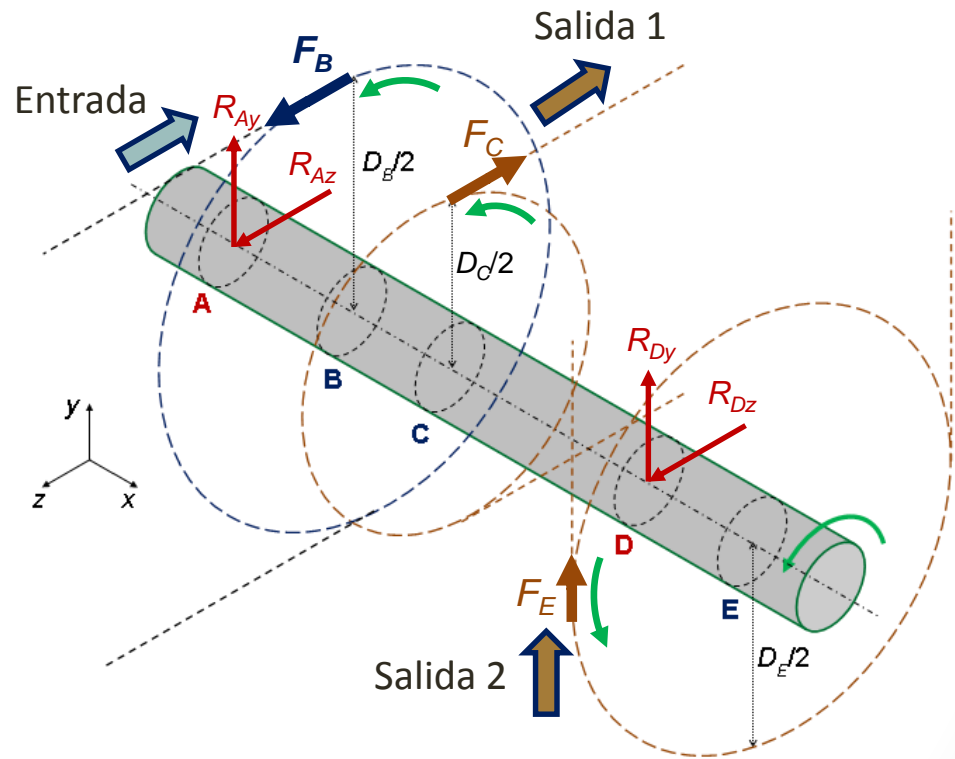
$$F_C \frac{D_C}{2} = T_C$$

$$F_E \frac{D_E}{2} = T_E$$

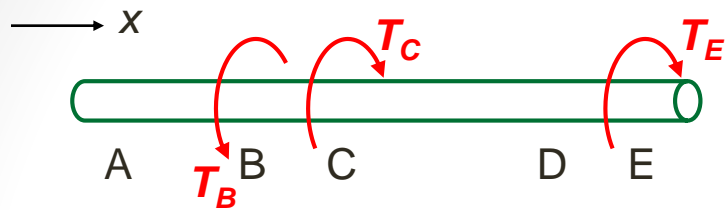
$$F_B = \frac{2T_B}{D_B} = \frac{2 \times 764 \text{ N} \cdot \text{m}}{0.150 \text{ m}} = 10.2 \text{ kN}$$

$$F_C = \frac{2T_C}{D_C} = \frac{2 \times 458 \text{ N} \cdot \text{m}}{0.120 \text{ m}} = 7.64 \text{ kN}$$

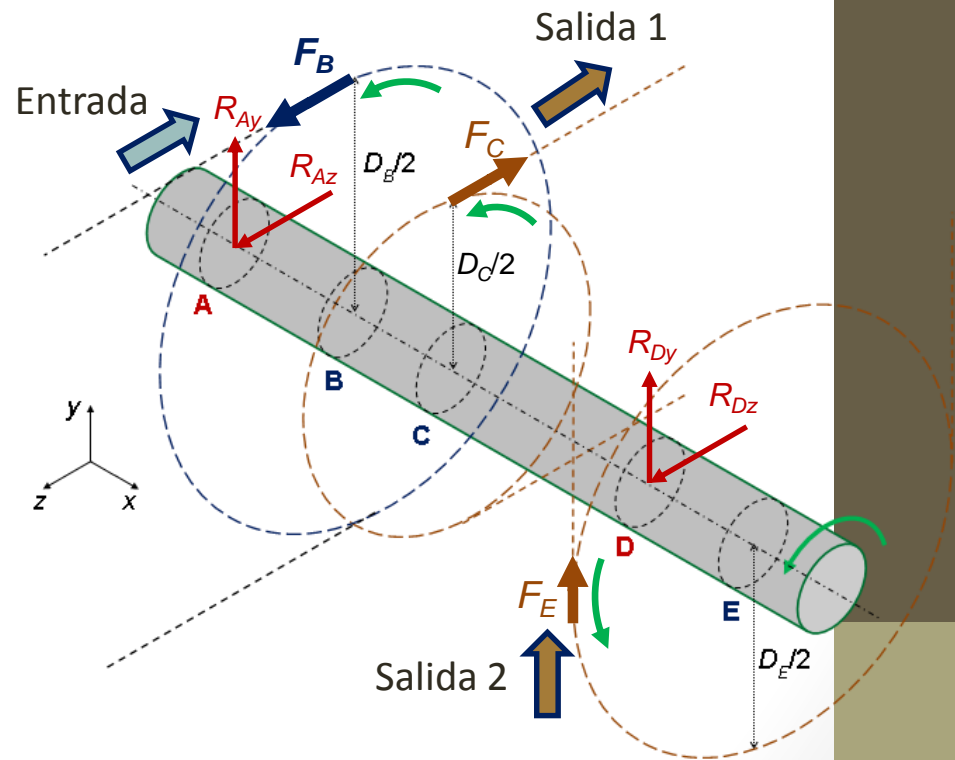
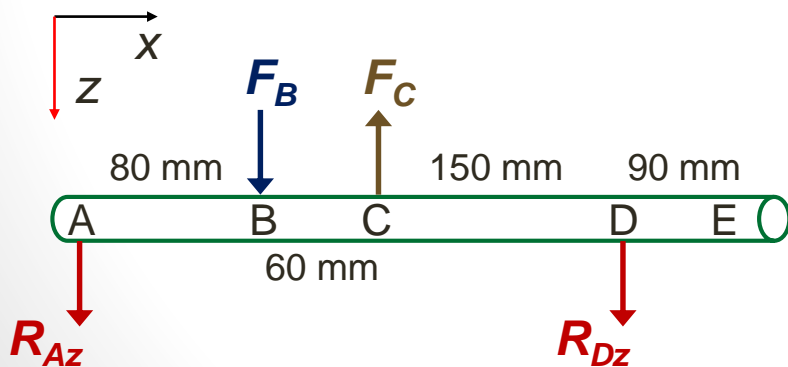
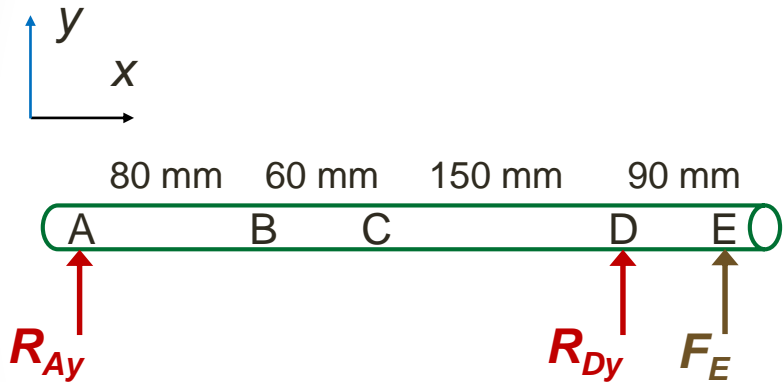
$$F_E = \frac{2T_E}{D_E} = \frac{2 \times 306 \text{ N} \cdot \text{m}}{0.144 \text{ m}} = 4.24 \text{ kN}$$



# 4. Diagramas de cuerpo libre



-Torsión  
-Flexión en xy  
-Flexión en xz



Se asume que  $F_B$ ,  $F_C$  y  $F_E$  actúan en z

## 5. Ecuaciones de equilibrio y reacciones

$$\sum F_y = 0; \quad R_{Ay} + R_{Dy} + F_E = 0,$$

$$\sum F_z = 0; \quad R_{Az} + R_{Dz} + F_B - F_C = 0,$$

$$\left( \curvearrowright + \sum M_{Axy} = 0; \quad 0.290R_{Dy} + 0.380F_E = 0,$$

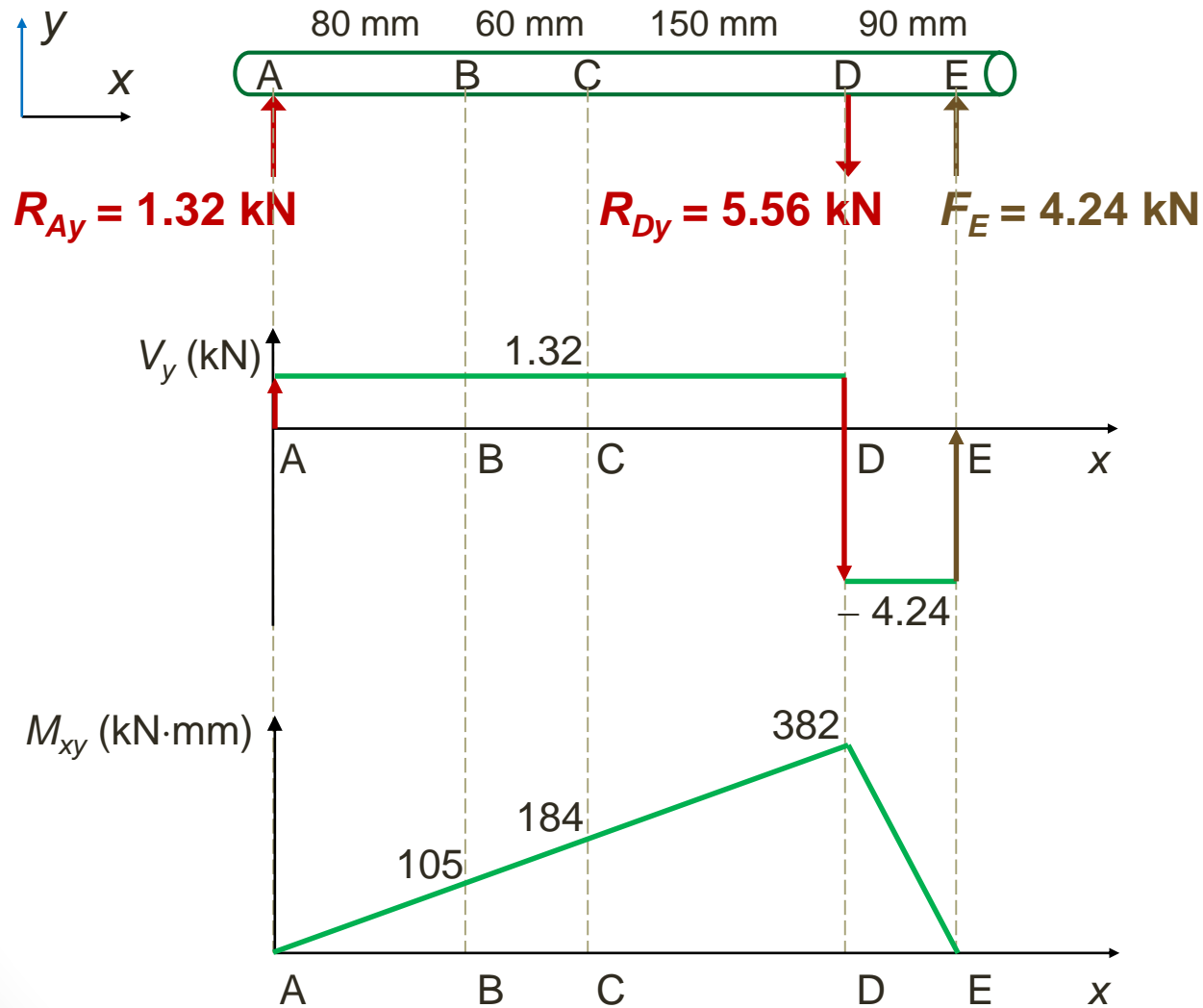
$$\left( \curvearrowright + \sum M_{Axz} = 0; \quad -0.080F_B + 0.140F_C - 0.290R_{Dz} = 0,$$

$$R_{Ay} = 1.32 \text{ kN}, \quad R_{Az} = -3.42 \text{ kN},$$

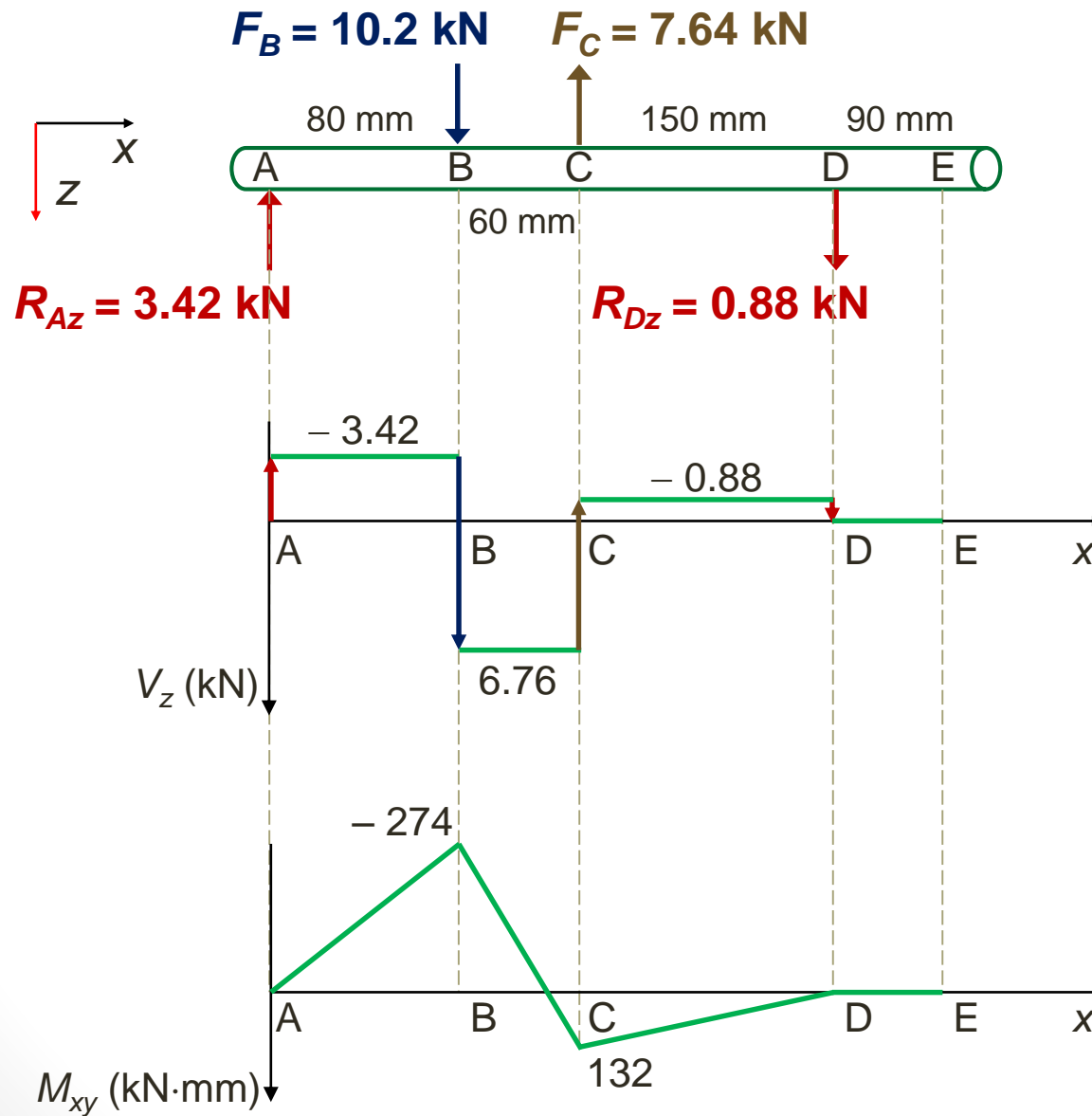
$$R_{Dy} = -5.56 \text{ kN} \quad \text{y} \quad R_{Dz} = 0.88 \text{ kN}$$



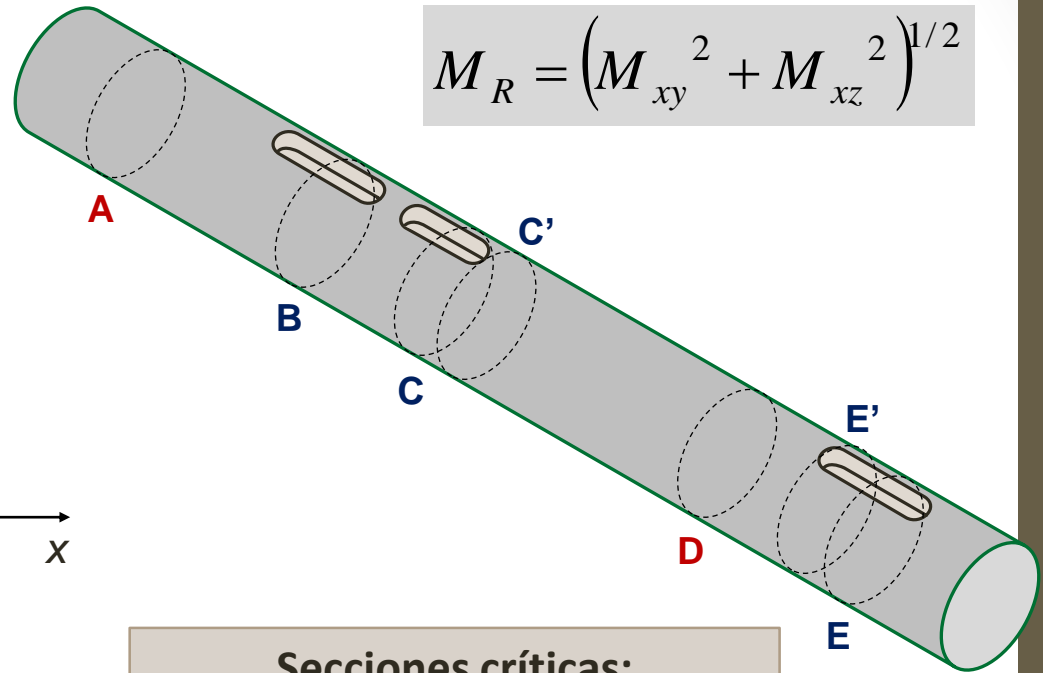
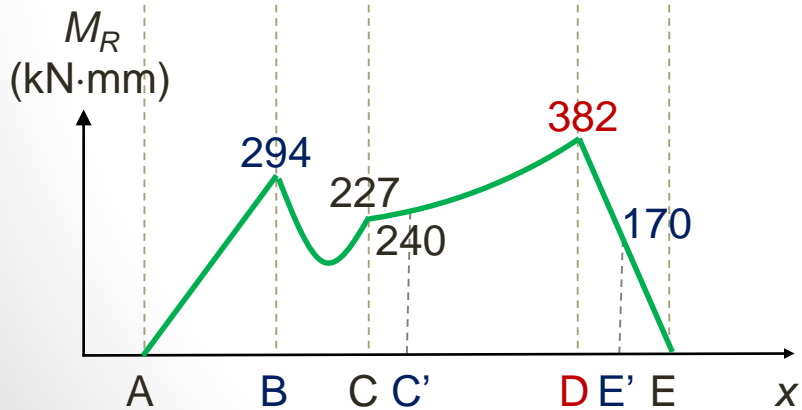
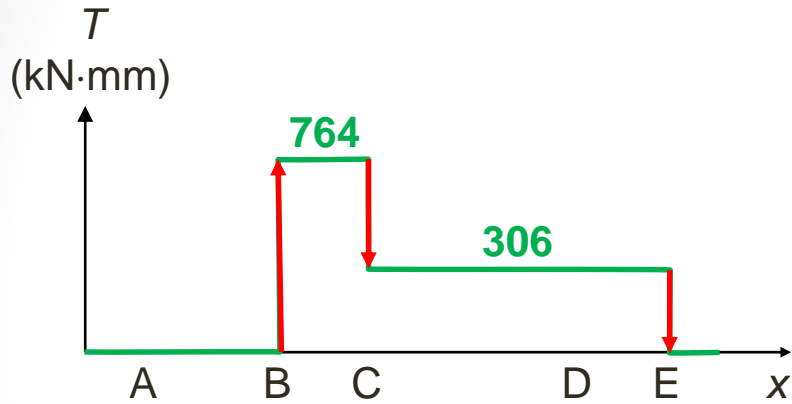
# 6. Diagramas $V_y$ y $M_{xy}$



# 6. Diagramas $V_z$ y $M_{xz}$



# 7. Diagramas $T$ y $M_R$ y secciones críticas



$$M_R = \left( M_{xy}^2 + M_{xz}^2 \right)^{1/2}$$

## Secciones críticas:

En tramo AC': B es más crítico

En tramo C'E:

- D es más crítico (cargas pico)
- D y C' son más críticos (fatiga)

(Note que B es más crítico que C')

→ Se analizan: B y D

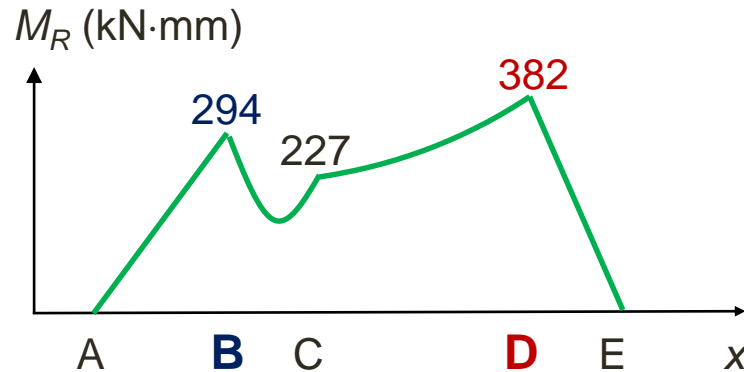
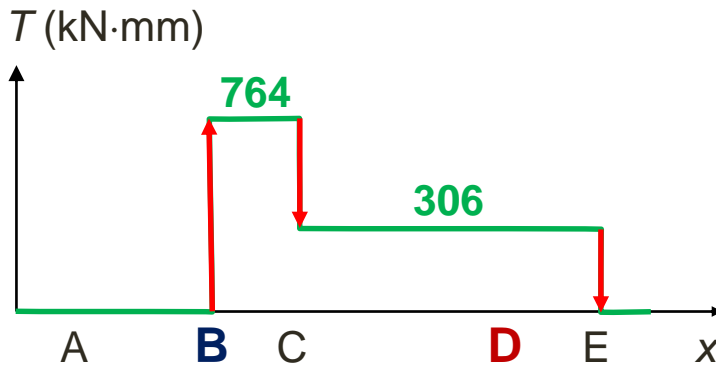
# 8. Cálculo para las cargas **pico**

TECO:

$$\left(\frac{S_y \pi}{4N}\right)^2 d^6 - (F^2)d^2 - (16MF)d - (64M^2 + 48T^2) = 0, \quad \Rightarrow$$

Las cargas son las **PICO**  
y se toman **POSITIVAS**

$$\frac{1}{N} = \frac{16}{\pi d^3 S_y} (4M^2 + 3T^2)^{1/2}$$



Sección	$d$ (mm)	$S_y$ (N/mm <sup>2</sup> )	$M_{PICO}$ (N·mm)	$T_{PICO}$ (N·mm)	$N_{PICO}$
B	40	310 (tabla A-3.2)	$9/4 \times 294 \times 10^3$	$9/4 \times 764 \times 10^3$	1.2
D			$9/4 \times 382 \times 10^3$	$9/4 \times 306 \times 10^3$	1.9

Como  $N_{PICO} = 1.2 < 1.5$  (valor recomendado), se decide aumentar el diámetro a **45 mm**, con el cual  $N_{PICO-B} = 1.7$  y  $N_{PICO-D} = 2.7$



$$N_{PICO} = 1.7 > 1.5$$

B: sección crítica

# 9.1 Ecuación de diseño

Norma para el diseño de árboles de transmisión ANSI/ASME B106.1M-1985

$$N = \frac{\pi d^3}{32} \left[ \left( K_f \frac{M}{S_n} \right)^2 + \frac{3}{4} \left( \frac{T}{S_y} \right)^2 \right]^{-1/2}$$



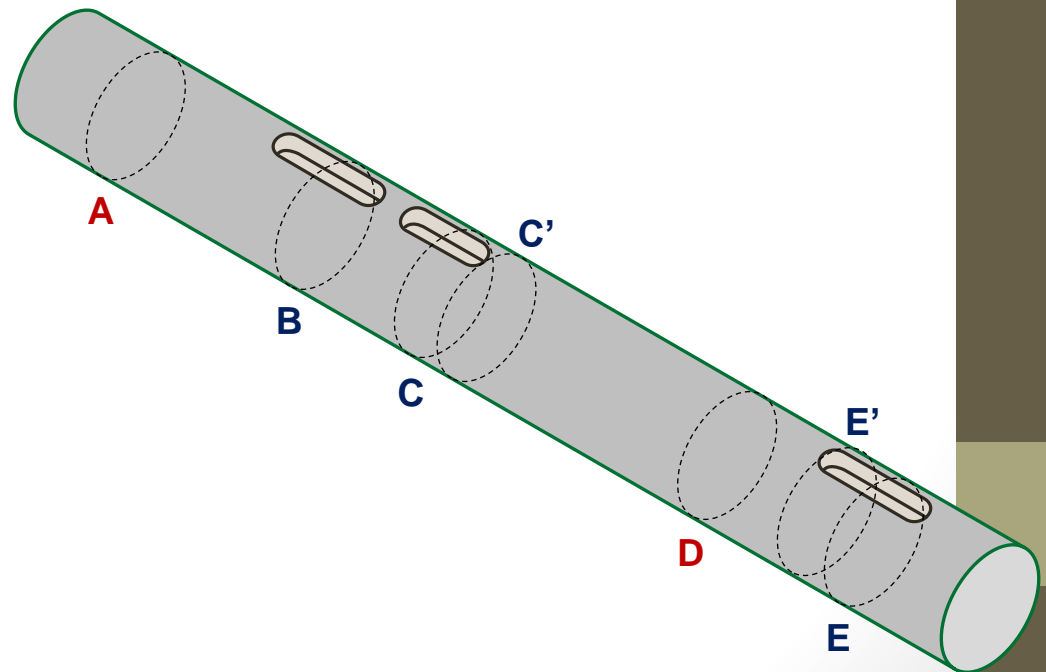
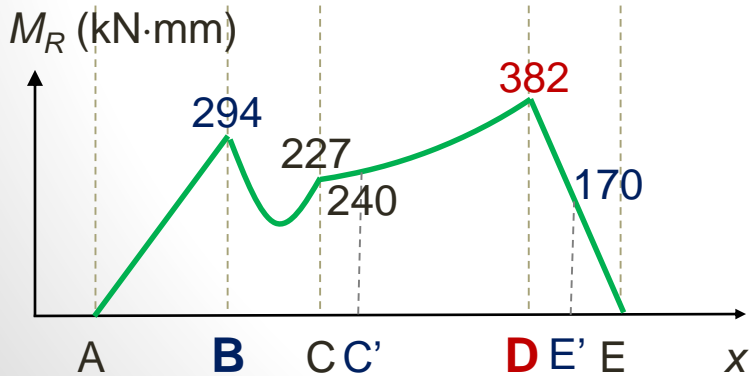
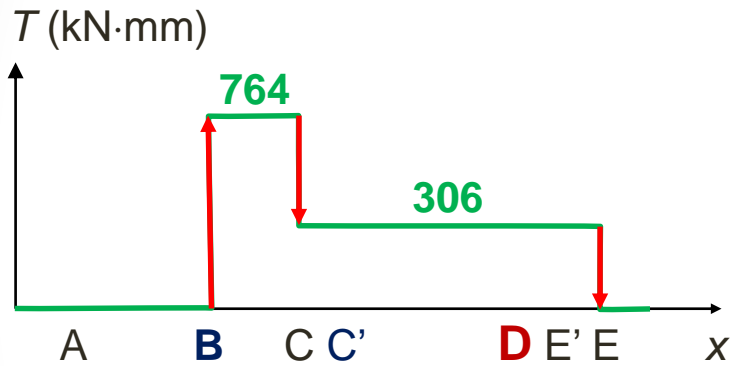
Para flexión

Condiciones:

- Par de torsión constante
- Flexión giratoria con momento constante
- Material dúctil
- Sección transversal circular sólida
- No existe fuerza axial ni otro tipo de carga diferente de torsión y flexión

# 9.2 Cargas

Sección	$M$ (N·mm)	$T$ (N·mm)
B	$294 \times 10^3$	$764 \times 10^3$
D	$382 \times 10^3$	$306 \times 10^3$



# 9.3 Propiedades del material

## **Propiedades básicas:**

- $S_y = 310$  MPa,  $S_u = 565$  MPa; acero SAE 1045 laminado en caliente (tabla A-3.2, apéndice 3)
- $S_e' = 0.5S_u = 0.5 \times 565$  MPa = 282.5 MPa (ecuación 5.2, capítulo 5)

## **Factores que reducen la resistencia a la fatiga:**

- Como se dijo  $S_n$  (y por lo tanto estos factores) deben calcularse para flexión
  - $K_a = 0.78$ , acero;  $S_u = 565$  MPa = 82 ksi; asumiendo árbol mecanizado (figura 5.11)
  - $K_b = 0.82$ , ecuación 5.21 para flexión,  $d = 45$  mm,  $d_e = d$  (flexión giratoria, ecuación 5.23.a)
  - $K_c = 0.753$ , trabajando con una confiabilidad de 99.9% (tabla 5.2)
  - $K_d = 1$ , la temperatura en el árbol es menor de 250 °C (ecuación 5.26)
  - $K_e = 1$ , no se prevé corrosión ni otros factores que reduzcan la resistencia
  - $K_{car} = 1$ , flexión
- $K = (0.78)(0.82)(0.753)(1)(1)(1) = 0.48$

## **Resistencia a la fatiga corregida:**

- $S_n = KS_e' = 0.48 \times 282.5$  MPa = 136 MPa (ecuación 5.50)

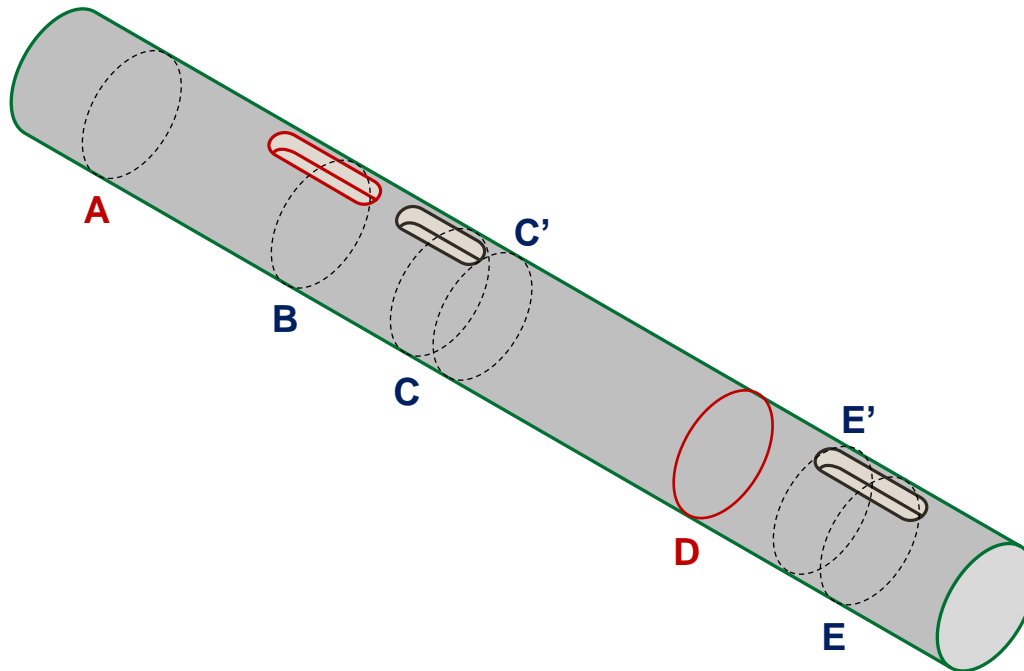
# 9.4 Factores de concentración de esfuerzos

- **Punto D**

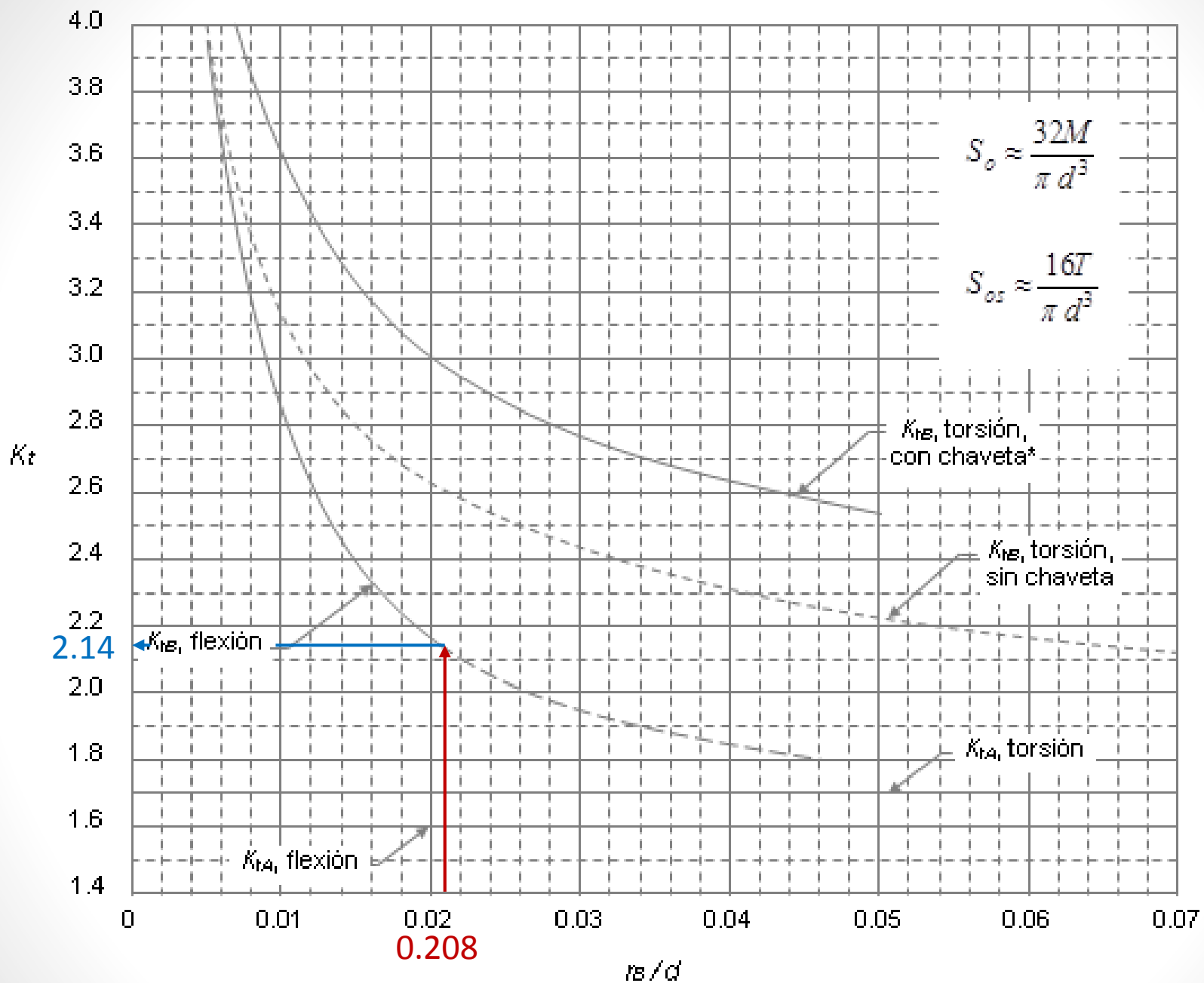
- $K_f = 1$  (no hay discontinuidad en D)

- **Punto B**

- $K_t = 2.14$  (cuñero de perfil,  $r_B/d \approx 1/48 \approx 0.0208$ , flexión) (figura A-5.18; apéndice 5)
- $\sqrt{a} = 0.39 \text{ mm}^{0.5}$  (acero,  $S_u = 565 \text{ MPa} = 82 \text{ ksi}$ , flexión) (tabla 5.3)
- $q = 1/(1 + \sqrt{a}/\sqrt{r}) = 1/(1 + 0.39 \text{ mm}^{0.5} / \sqrt{0.936 \text{ mm}}) = 0.71$  ( $r_B = 0.0208 \times 45 \text{ mm}$ ) (ecuación 5.31)
- $K_f = 1 + q(K_t - 1) = 1 + 0.71(2.14 - 1) = 1.8$  (ecuación 5.30)







El valor sugerido de  $r_b/d$  es de  $\sim 1/48 \approx 0.0208$  para  $d \leq 6.5$  in y  $0.0156$  para  $d > 6.5$  in **figura A-5.18**

# 9.5 Factor de seguridad - fatiga

$$N = \frac{\pi d^3}{32} \left[ \left( K_f \frac{M}{S_n} \right)^2 + \frac{3}{4} \left( \frac{T}{S_y} \right)^2 \right]^{-1/2}$$

Sección	$d$ (mm)	$K_f$	$S_y$ (N/mm <sup>2</sup> )	$S_n$ (N/mm <sup>2</sup> )	$M$ (N·mm)	$T$ (N·mm)	$N_{FATIGA}$
B	45	1.8	310	136	$294 \times 10^3$	$764 \times 10^3$	4.2
D		1			$382 \times 10^3$	$306 \times 10^3$	10.5

$$N_{FATIGA} = 4.2 > 1.5$$

B: sección crítica