




## DISEÑO DE ÁRBOLES

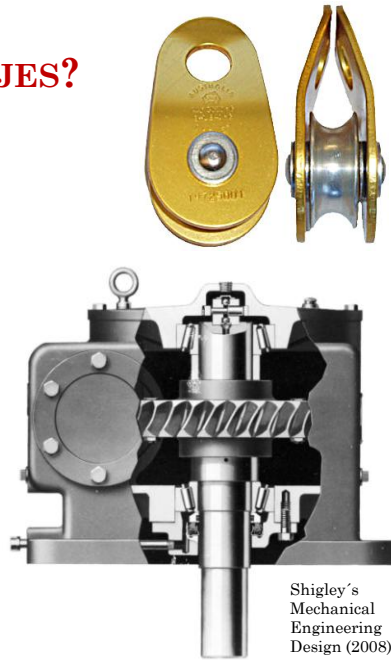
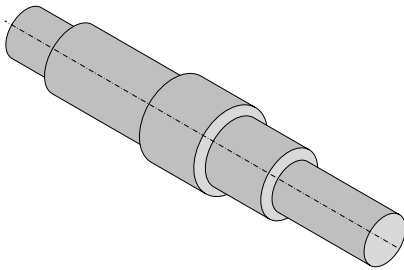
Universidad Tecnológica de Pereira  
Facultad de Ingeniería Mecánica  
Diseño I y II  
Profesor: Libardo Vanegas Useche  
Última modificación – 25 de abril de 2011

### CONTENIDO

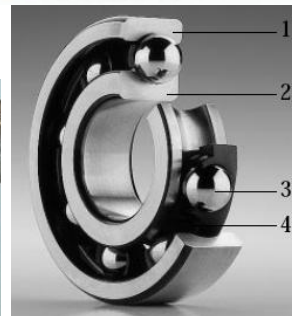
- **¿Qué son árboles y ejes?**
  - Etapas del diseño de árboles
  - Materiales comunes
  - Configuraciones y detalles geométricos
  - Esfuerzos
  - Rigidez
  - Análisis modal
- 

## ¿QUÉ SON ÁRBOLES Y EJES?

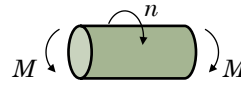
- Elementos mecánicos, generalmente de sección circular
- Sostienen piezas que giran solidariamente o entorno a ellos
- Árbol o flecha: **gira** transmitiendo **potencia**
- Eje: **no** transmite potencia



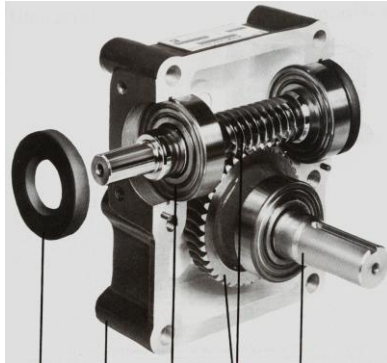
## ¿QUÉ SON ÁRBOLES Y EJES?



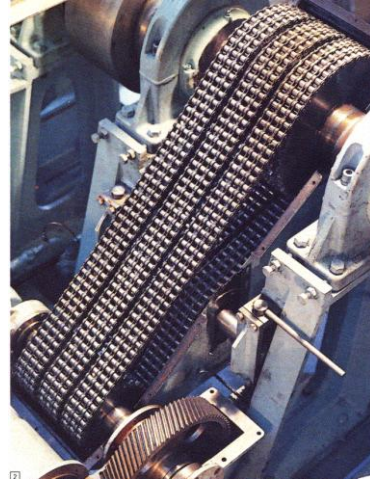
## ¿QUÉ SON ÁRBOLES Y EJES?



- Árboles: sometidos a  $T, M, F, V \rightarrow$  Esfuerzos combinados variables



Sello Bastidor Rodamiento de bolas Tornillo y rueda dentada Árbol de salida



## ETAPAS DEL DISEÑO DE ÁRBOLES

- Selección del material
- Diseño constructivo (configuración geométrica)
- Verificación de la resistencia
  - Estática
  - A la fatiga
  - A las cargas dinámicas (cargas pico, cargas de arranque, etc.)
- Verificación de la rigidez
  - Deformación por torsión
  - Deflexión por flexión
  - Pendiente
- Análisis Modal (verificación de las frecuencias naturales del árbol)
  - $n \neq n_{cr}$

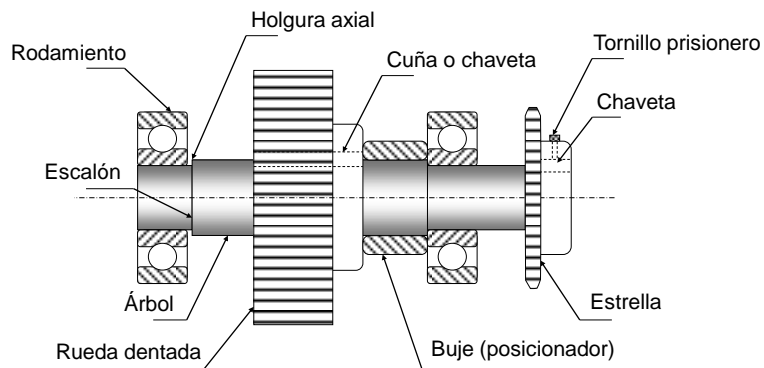
## MATERIALES COMUNES

- **ACERO (el más usado)**
  - Escoger inicialmente un **acero al carbono** (bajo costo)
    - SAE 1020 a 1050, por ejemplo 1035, 1040, 1045
  - Si los criterios de resistencia dominan las deformaciones: seleccionar aceros de mayor resistencia
    - **Aceros aleados** SAE 3140, 4140 ó 4340
    - Otros: 3150, 5140, 1340, 1350 y 8650 (Budynas y Nisbett, 2008)
- Hierros fundidos o nodulares (para piezas integradas al árbol)
- Bronces y aceros inoxidables (para ambiente corrosivos)



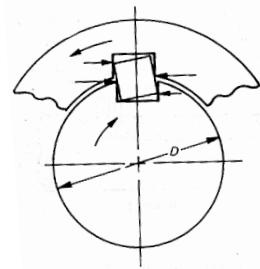
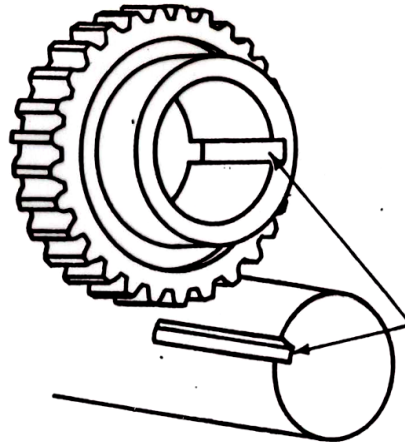
[http://www.sapiensman.com/ESDictionary/G/Technical\\_vocabulary\\_Spanish%28G3%29.php?psps\\_page=27](http://www.sapiensman.com/ESDictionary/G/Technical_vocabulary_Spanish%28G3%29.php?psps_page=27)

## CONFIGURACIONES Y DETALLES GEOMÉTRICOS



## CONFIGURACIONES Y DETALLES GEOMÉTRICOS

○ Chavetas o cuñas



Chaveta

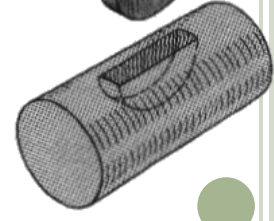
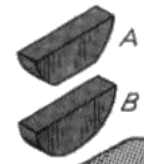
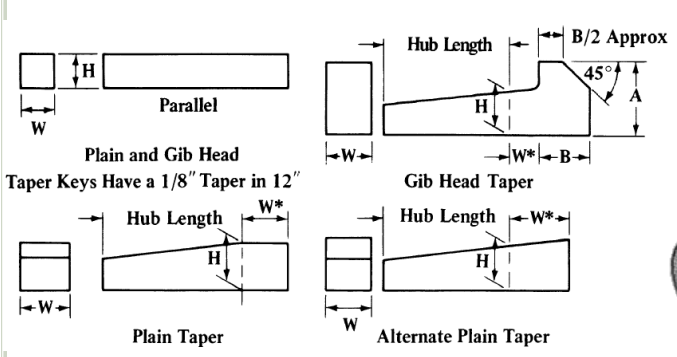
Chaveteros



## CONFIGURACIONES Y DETALLES GEOMÉTRICOS

○ Algunos tipos de chavetas:

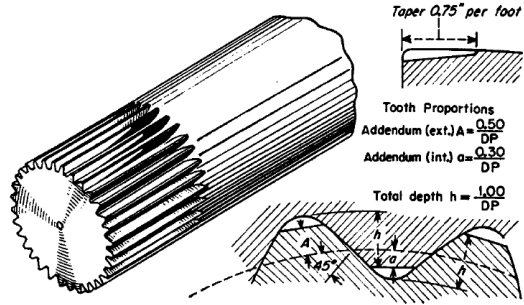
- paralela, ahusada, ahusada con cabeza y Woodruff



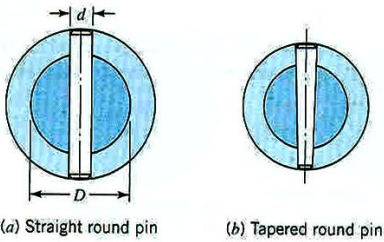
Woodruff

## CONFIGURACIONES Y DETALLES GEOMÉTRICOS

- Alternativas:
  - Árboles estriados
  - pasadores



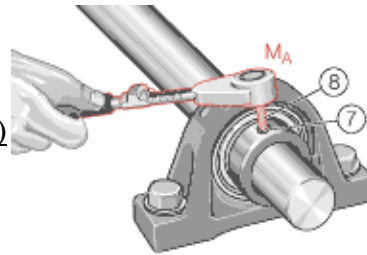
Árbol estriado



Pasadores

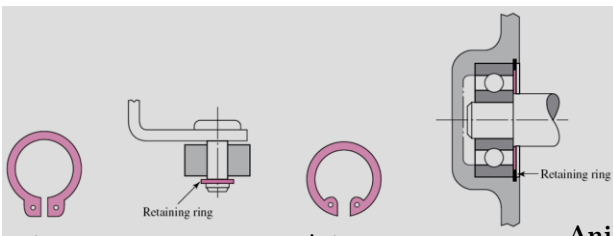
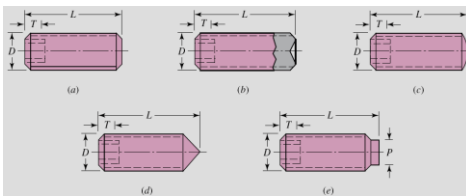
## CONFIGURACIONES Y DETALLES GEOMÉTRICOS

- Anillos de retención
- Tornillos de fijación (prisioneros)



Prisioneros

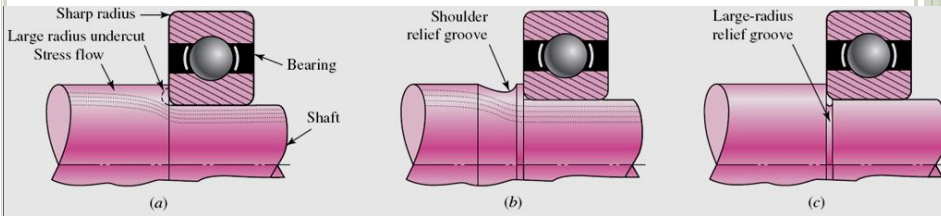
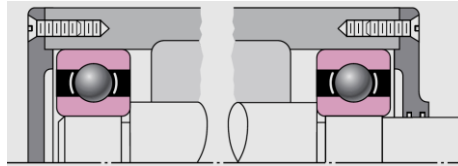
<http://medias.schaeffler.com/medias/es/hp.info.body/THE>  
\*UK\*7



Anillos de retención

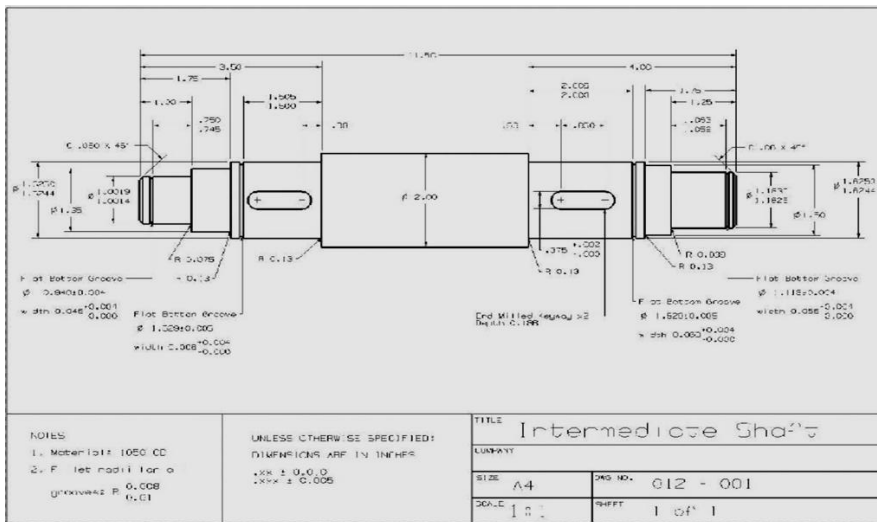
## CONFIGURACIONES Y DETALLES GEOMÉTRICOS

- Rodamientos y sus apoyos



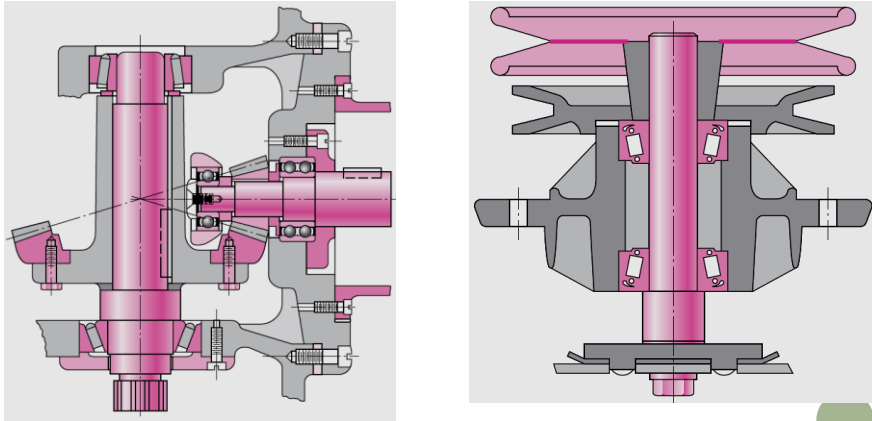
Shigley's Mechanical Engineering Design (2008)

## CONFIGURACIONES Y DETALLES GEOMÉTRICOS



Shigley's Mechanical Engineering Design (2008)

## CONFIGURACIONES Y DETALLES GEOMÉTRICOS



Shigley's Mechanical Engineering Design (2008)

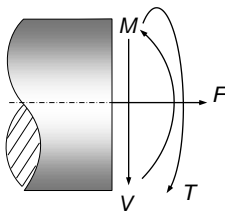
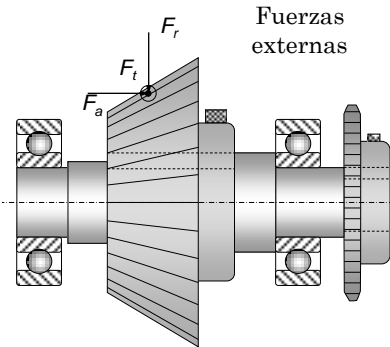
## CONFIGURACIONES Y DETALLES GEOMÉTRICOS

- **Fácil** montaje, desmontaje y mantenimiento.
- Los árboles deben ser **compactos**, para reducir material tanto en longitud como en diámetro (recuérdese que a mayores longitudes, mayores tienden a ser los esfuerzos debidos a flexión y, por lo tanto, mayores tenderán a ser los diámetros).
- Permitir fácil **aseguramiento** de las piezas sobre el árbol para evitar movimientos indeseables.
- Las medidas deben ser preferiblemente **normalizadas**.
- Evitar **discontinuidades** y cambios bruscos de sección, especialmente en sitios de grandes esfuerzos.
- Generalmente los árboles se construyen **escalonados** para el mejor posicionamiento de las piezas.
- Generalmente los árboles se soportan sólo en **dos apoyos**, con el fin de reducir problemas de alineamiento de éstos.
- Ubicar las piezas **cerca** de los apoyos para reducir momentos flectores.
- Mantener bajos los **costos** de fabricación.
- Basarse en **árboles existentes** o en la propia experiencia, para configurar el árbol (consultar catálogos, analizar reductores y sistemas de transmisión de potencia).

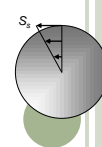
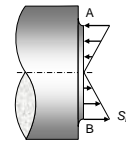
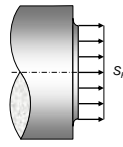
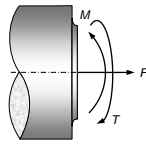


## ESFUERZOS

- Las fuerzas producen:
  - Flexión y cortadura ( $F_r$ )
  - Flexión, torsión y cortadura ( $F_t$ )
  - Carga axial (tracción o compresión) y flexión ( $F_a$ )



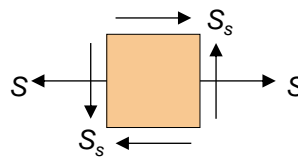
Fuerzas internas



Distribuciones de esfuerzos

## ESFUERZOS

- Estado de esfuerzo (si no hay ajustes de interferencia)
- Para árboles de **sección circular sólida**, en el punto crítico

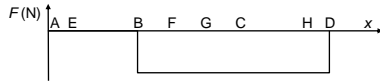
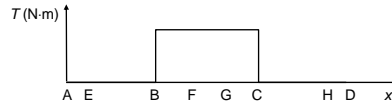
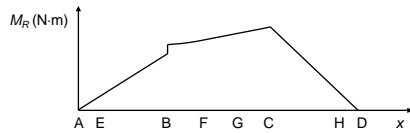
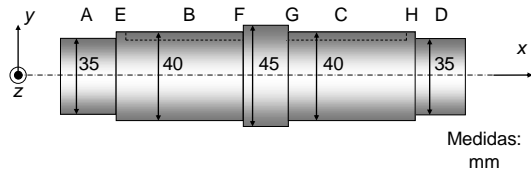


$$S_s = \frac{Tc}{J} = \frac{16T}{\pi d^3}$$

$$S = \pm \alpha_p \frac{F}{A} \pm \frac{Mc}{I} = \pm \alpha_p \frac{4F}{\pi d^2} \pm \frac{32M}{\pi d^3}, \quad \text{donde} \quad M = \left( M_{xy}^2 + M_{xz}^2 \right)^{1/2}$$

## ESFUERZOS

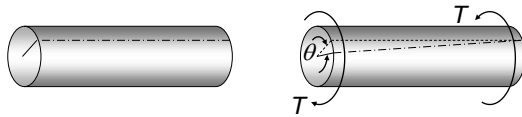
- Secciones y puntos críticos



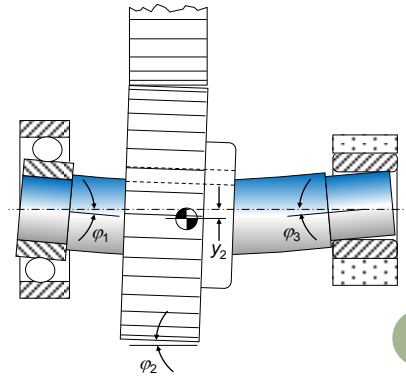
## RIGIDEZ

- Ángulo de torsión

$$\theta = \frac{TL}{JG} \leq [\theta]$$



- Deflexión y pendiente



## RIGIDEZ

Deformaciones permisibles de árboles. Fuente: Ivanov (1984)

| Deformación                                | Aplicación | Deformación permisible*  |   |
|--|------------|--|---|
| Deflexión (debida a flexión)               | y          | Deflexión máxima en árboles que soportan ruedas dentadas       | $[y] = (0.0002...0.0003)L$ , donde $L$ es la distancia entre apoyos |
|  |            | En el sitio de asiento de ruedas dentadas cilíndricas          | $[y] = (0.01...0.03)m$ , donde $m$ es el módulo de la transmisión   |
|  |            | En el sitio de asiento de ruedas dentadas cónicas e hipoidales | $[y] = (0.005...0.007)m$ , donde $m$ es el módulo de la transmisión |
|  |            | Deflexión máxima en los árboles de los motores asíncronos      | $[y] = 0.1h$ , donde $h$ es la holgura entre el rotor y el estator  |
|  |            | Deflexión máxima en árboles de ventiladores                    | $[y] = (0.0003...0.0005)D$ , donde $D$ es el diámetro del rotor     |
| Deflexión angular (debida a flexión)       | $\varphi$  | En el sitio de asiento de ruedas dentadas                      | $[\varphi] = 0.001$ rad   |
|  |            | En un cojinete   | $[\varphi] = 0.001$ rad   |
|  |            | En el asiento de rodamientos de bolas                          | $[\varphi] = 0.01$ rad  |
|  |            | En el asiento de rodamientos de rodillos cilíndricos           | $[\varphi] = 0.0025$ rad  |
|  |            | En el asiento de rodamientos cónicos                           | $[\varphi] = 0.0016$ rad  |
|  |            | En el asiento de rodamientos esféricos                         | $[\varphi] = 0.05$ rad  |
| Ángulo de torsión (por unidad de longitud) | $\theta/L$ | Grúas desplazables y portátiles                                | $[\theta/L] = 0.0045...0.006$ rad/m                                 |
|  |            | Husillos de tornos y taladros                                  | $[\theta/L] = 0.00175$ rad/m  |
|  |            | Árboles medios de destinación general                          | $[\theta/L] = 0.009$ rad/m  |
|  |            | Árboles de cardanes de vehículos ( $d = 30...50$ mm)           | $[\theta/L] = 0.005...0.007$ rad/m                                  |

\* Otras recomendaciones<sup>[4]</sup> indican que:  $y \leq 0.005$  in en los asientos de ruedas dentadas;  $\varphi_1 + \varphi_2 < 0.03^\circ$ , donde  $\varphi_1, \varphi_2$  son las deflexiones angulares de un par de ruedas dentadas engranando; y  $\varphi$  y  $\theta$  en cojinetes de contacto deslizante debe ser menor que el espesor de la película de aceite.

\* El módulo,  $m$ , de una transmisión por ruedas dentadas es un parámetro que define el tamaño de los dientes

## ANÁLISIS MODAL

### o Velocidades críticas (resonancia)

#### o Fórmula de Rayleigh (flexión; cargas en medio de dos apoyos)

$$n_{cr(M)} [\text{r/min}] = 946 \left( \frac{W_1 y_1 + W_2 y_2 + \dots + W_n y_n}{W_1 y_1^2 + W_2 y_2^2 + \dots + W_n y_n^2} \right)^{1/2}$$

$W_i$ : masa  $i$  sobre el árbol  
 $y_i$ : deflexión estática debida a  $W_i$

#### o Fórmula de Dunkerley (flexión ; cargas en medio de dos apoyos)

$$1/n_{cr(M)}^2 = (1/n_1^2 + 1/n_2^2 + \dots + 1/n_n^2) \quad n_i = 946/y_i^{0.5}$$

#### o Torsión (si el árbol tiene una sola entrada y una sola salida de potencia)

$$n_{cr(T)} = \frac{60}{\pi} \left( \frac{GJ}{L_T I_m} \right)^{1/2}, \quad \text{donde } I_m = m_a d_E^2/4$$

$$n \ll n_{cr(1)} \quad \text{ó} \quad 1.4n_{cr(1)} \leq n \leq 0.7n_{cr(2)}$$

