

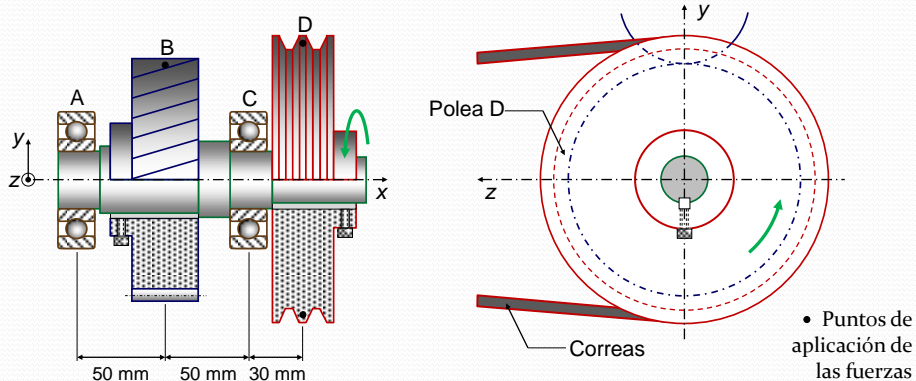
Ejemplos 7.1 y 7.2

Capítulo 7 Diseño de árboles

Universidad Tecnológica de Pereira
 Facultad de Ingeniería Mecánica
 DISEÑO I
 Profesor: Libardo Vanegas Useche
 25 de junio de 2012

Datos

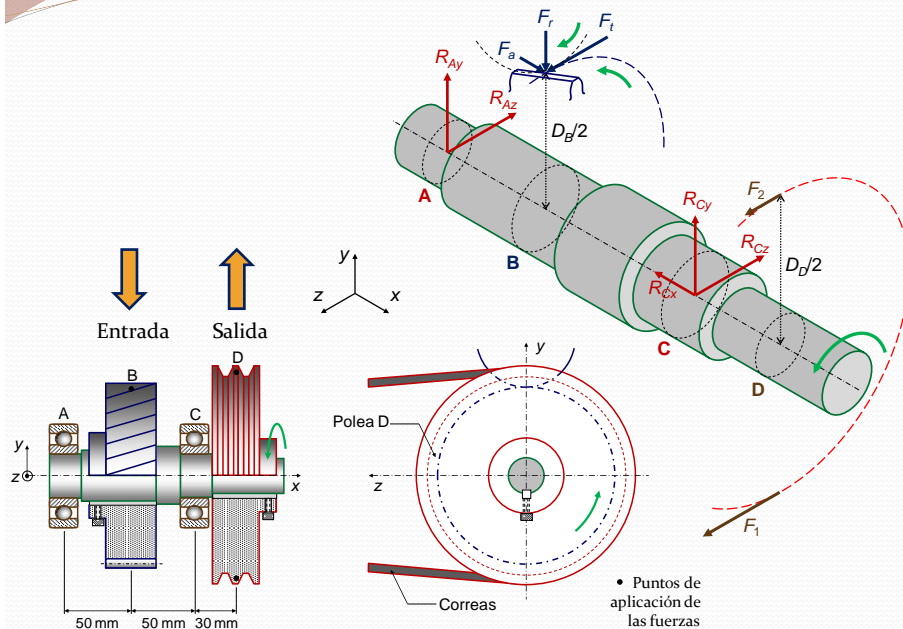
- $P = 10 \text{ kW}$; $n = 1200 \text{ min}^{-1}$ (**entrada**: piñón helicoidal B; **salida**: p Polea D)
 - Relaciones entre las fuerzas: $F_1 = 3F_2$; $F_a = 0.2F_t$; $F_r = 0.27F_t$
 - $D_B = 132 \text{ mm}$; $D_D = 162 \text{ mm}$ (diámetros primitivos)
 - Acero SAE 1045 laminado en frío
- a) Determinar el diámetro mínimo que debe tener la sección **más cargada** del árbol (que no necesariamente es la más crítica), para que resista las **cargas pico** (cargas pico = $2 \times$ cargas nominales). Usar la TECO/von Mises con $N = 1.5$
 - b) Determinar el diámetro mínimo que debe tener la sección donde se aloja el rodamiento C, con el fin de que la sección del hombro donde se apoya dicho rodamiento resista las cargas de **fatiga**. Tomar $N = 1.5$.



Procedimiento

1. Diagrama de cuerpo libre
2. Par de torsión y diagrama de par de torsión
3. Fuerzas externas
4. Diagramas de cuerpo libre
5. Ecuaciones de equilibrio y reacciones
6. Diagramas de fuerza cortante y momento flector
7. Diagrama de fuerza axial
8. Cálculo para las cargas **pico**
9. Cálculo para las cargas de **fatiga**

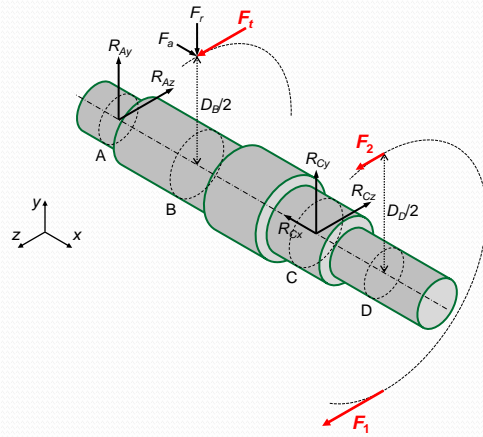
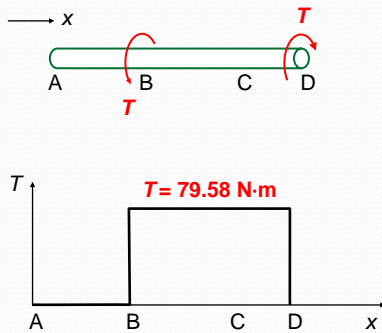
1. Diagrama de cuerpo libre



2. Par de torsión (T) y diagrama de T

- Como hay una sola entrada y una sola salida de potencia \rightarrow sólo se calcula un par de torsión

$$T [\text{N}\cdot\text{m}] = \frac{60P [\text{W}]}{2\pi n [\text{min}^{-1}]} = \frac{(60)(10 \times 10^3)}{(2\pi)(1200)} \text{N}\cdot\text{m} = 79.58 \text{N}\cdot\text{m}$$



3. Fuerzas externas

Nota:
 $F_a = F_t \times \tan \beta_d$

Nota:
 $F_r = F_t \times \tan \alpha_p$

$$F_t \frac{D_B}{2} = T,$$

$$F_t = \frac{2T}{D_B} = \frac{(2)(79.58 \text{ N}\cdot\text{m})}{0.132 \text{ m}} = 1205.7 \text{ N}$$

$$F_a = 0.20F_t, \text{ entonces}$$

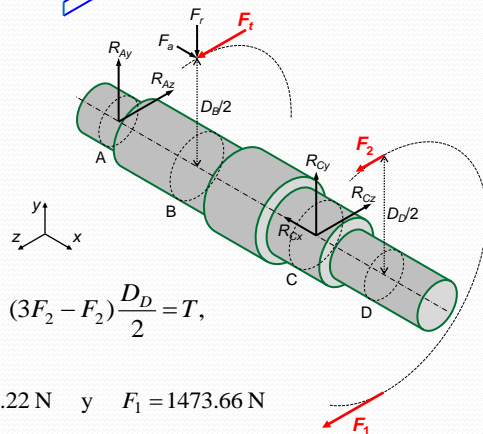
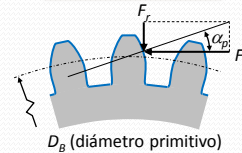
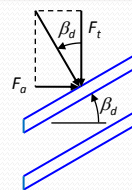
$$F_a = (0.20)(1205.7 \text{ N}) = 241.14 \text{ N}$$

$$F_r = 0.27F_t, \text{ entonces}$$

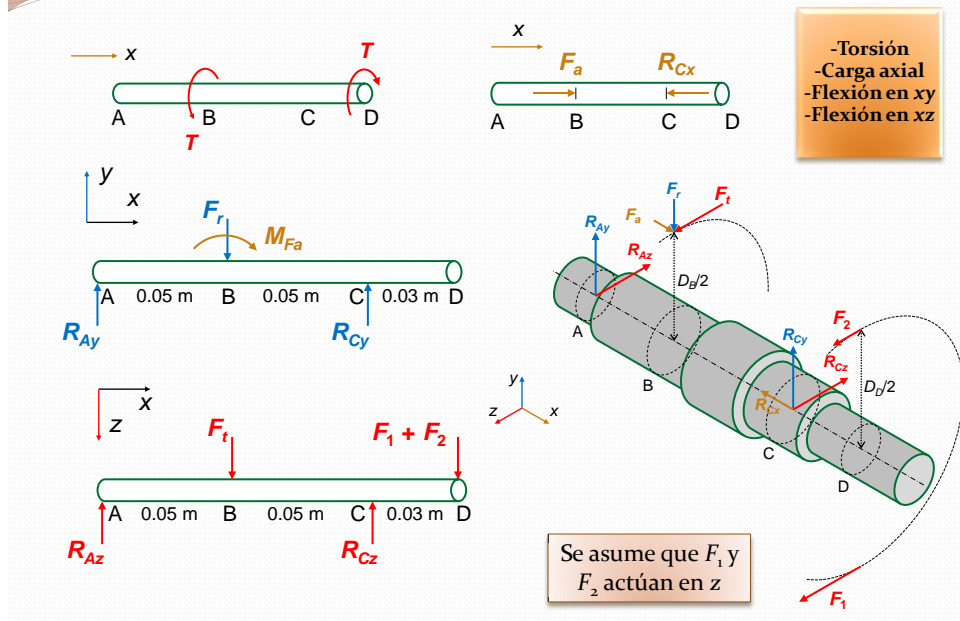
$$F_r = (0.27)(1205.7 \text{ N}) = 325.54 \text{ N}$$

$$(F_1 - F_2) \frac{D_D}{2} = T; \text{ como } F_1 = 3F_2, \quad (3F_2 - F_2) \frac{D_D}{2} = T,$$

$$\text{de donde } F_2 = \frac{T}{D_D} = \frac{(79.58 \text{ N}\cdot\text{m})}{0.162 \text{ m}} = 491.22 \text{ N} \text{ y } F_1 = 1473.66 \text{ N}$$



4. Diagramas de cuerpo libre



5. Ecuaciones de equilibrio y reacciones

$$\sum F_x = 0; \quad F_a - R_{Cx} = 0,$$

$$\sum F_y = 0; \quad R_{Ay} + R_{Cy} - F_r = 0,$$

$$\sum F_z = 0; \quad F_t + (F_1 + F_2) - R_{Az} - R_{Cz} = 0,$$

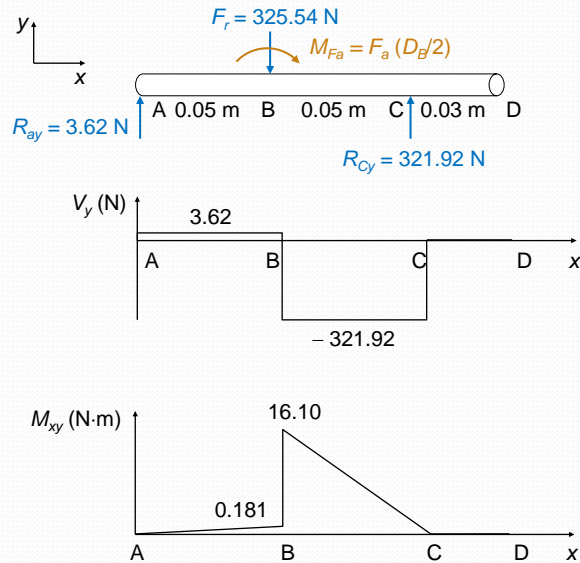
$$\left(+ \sum M_{Axy} = 0; \quad 0.1R_{Cy} - 0.05F_r - M_{Fa} = 0, \right.$$

$$\left(+ \sum M_{Axz} = 0; \quad 0.1R_{Cz} - 0.05F_t - 0.13(F_1 + F_2) = 0, \right.$$

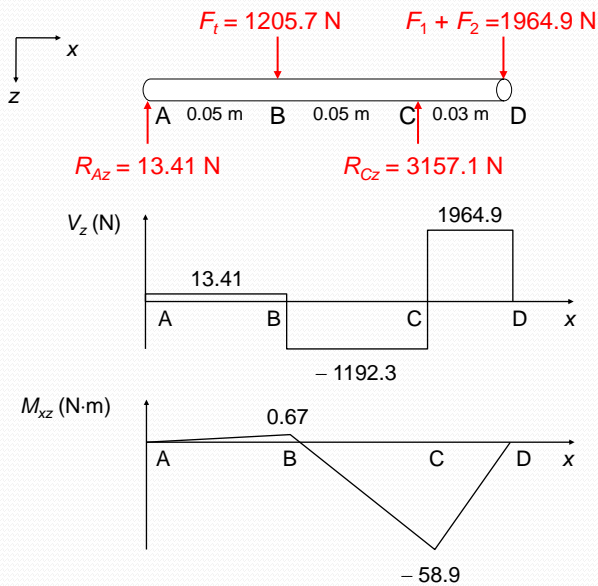
$$R_{Ay} = 3.62 \text{ N}, \quad R_{Az} = 13.41 \text{ N}, \quad R_{Cx} = 241.14 \text{ N},$$

$$R_{Cy} = 321.92 \text{ N} \quad y \quad R_{Cz} = 3157.1 \text{ N}$$

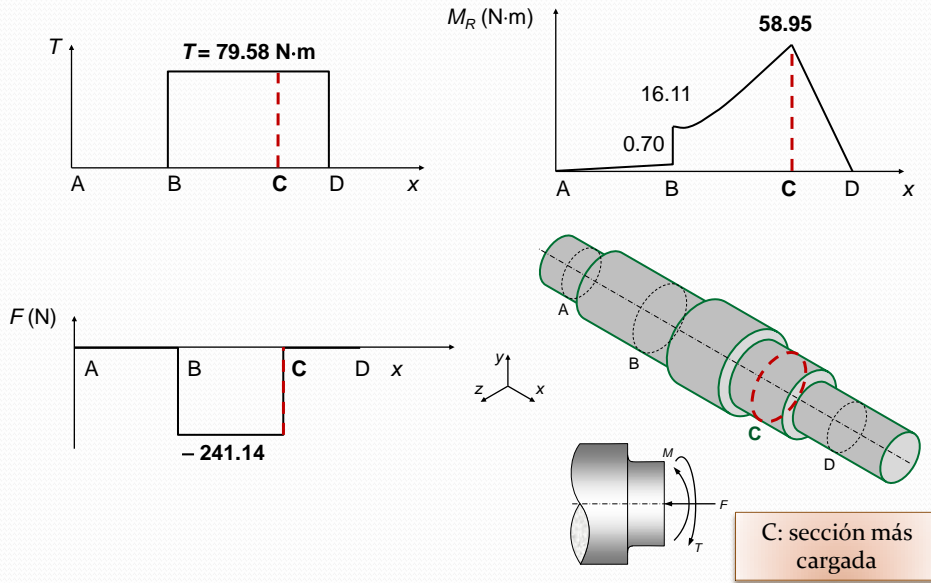
6. Diagramas V_y y M_{xy}



6. Diagramas V_z y M_{xz}



6 y 7. Diagramas T , M_R y F $M_R = (M_{xy}^2 + M_{xz}^2)^{1/2}$.



8. Diámetro de la sección C – cargas pico

- TECO/von Mises
- $N = 1.5$
- $S_y = 531 \text{ MPa}$, obtenido de la tabla A-3.2 (apéndice 3) para el acero SAE 1045 laminado en frío
- $M = 2 \times 58.95 = 117.9 \text{ N}\cdot\text{m}$
- $T = 2 \times 79.58 = 159.2 \text{ N}\cdot\text{m}$
- $F = 2 \times 241.14 = 482.3 \text{ N}$
- Las cargas anteriores son las cargas **PICO** y se toman **POSITIVAS**

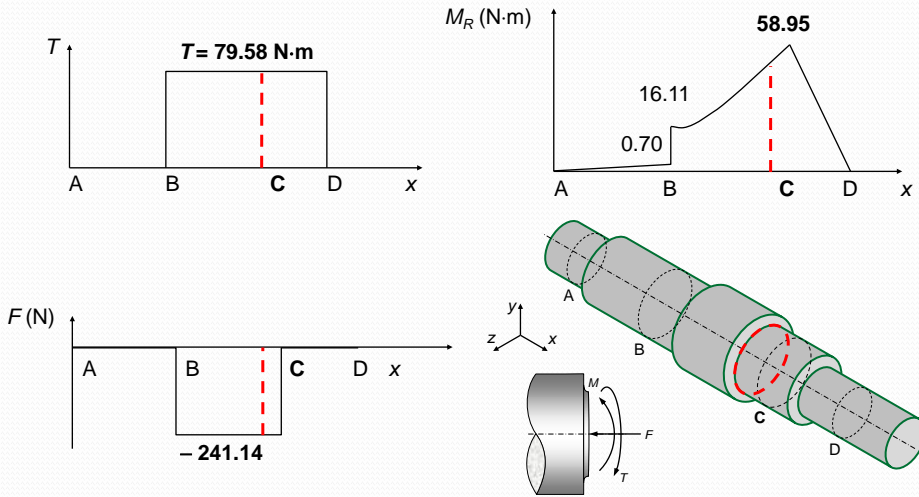
$$\left(\frac{S_y \pi}{4N} \right)^2 d^6 - (F^2)d^2 - (16MF)d - (64M^2 + 48T^2) = 0,$$

$$\left(\frac{531 \times 10^6 \pi}{(4)(1.5)} \right)^2 d^6 - (482.275^2)d^2 - [(16)(117.89)(482.3)]d - [(64)(117.9)^2 + (48)(159.2)^2] = 0,$$

- $d = 0.0174 \text{ m} = 17.4 \text{ mm}$
- Algunos diámetros, en mm, de rodamientos rígidos de bolas son: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 15, 17, 20, 25, 30, ...; entonces, el diámetro mínimo de la sección C debe ser de **20 mm**

9.1 Cargas

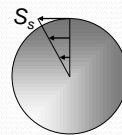
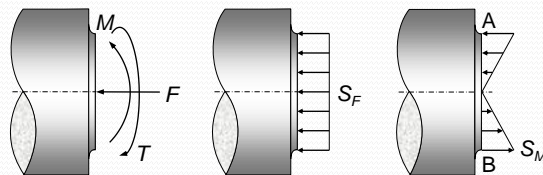
- Sección a analizar: cambio de sección donde se apoya el rodamiento C
- $T = 79.58 \text{ N}\cdot\text{m}$, $F = 241.14 \text{ N}$, $M \approx 58.95 \text{ N}\cdot\text{m}$



9.2 Esfuerzos nominales

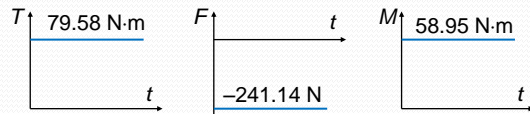
- $T = 79.58 \text{ N}\cdot\text{m}$, $F = -241.14 \text{ N}$, $M \approx 58.95 \text{ N}\cdot\text{m}$

$$S_{ms} = \frac{16T_m}{\pi d^3} = \frac{16T}{\pi d^3} = \frac{16 \times 79.58 \text{ N}\cdot\text{m}}{\pi d^3}$$



$$S_{as} = \frac{16T_a}{\pi d^3} = 0$$

$$S_{m(F)} = \frac{F_m}{A} = \frac{4F_m}{\pi d^2} = -\frac{4 \times 241.14 \text{ N}}{\pi d^2}$$



$$S_{a(F)} = \frac{F_a}{A} = 0$$

$$S_{m(M)} = 0$$



$$S_{a(M)} = \frac{Mc}{I} = \frac{32M}{\pi d^3} = \frac{32 \times 58.95 \text{ N}\cdot\text{m}}{\pi d^3}$$

SÓLO M PRODUCE ESFUERZO VARIABLE

9.3 Ecuaciones de diseño

- Podemos utilizar, por ejemplo, la ecuación 7.18 y la 7.22.b, ya que la sección de análisis cumple las condiciones de éstas

$$\frac{1}{N} = \frac{\sqrt{\sigma_m^2 + 3\tau_m^2}}{S_y} + \frac{\sqrt{\sigma_a^2 + 3\tau_a^2}}{S_n} \quad (\text{método von Mises, usando Soderberg}) \quad \text{ó}$$

Debido sólo a flexión

Entonces, se calcula para flexión

$$\frac{1}{N} = \sqrt{\left(\frac{[K_{ff} S_a]}{S_{nMF}}\right)^2 + \left(\frac{S_{ms}}{S_{ys}} + \frac{K_{ff(T)} S_{as}}{S_{ns}}\right)^2}; \quad \text{si } S_m < 0 \quad (\text{método Faires}),$$

9.4 Propiedades del material

Propiedades básicas:

- $S_y = 531 \text{ MPa}$ y $S_u = 627 \text{ MPa}$; acero SAE 1045 laminado en frío (tabla A-3.2, apéndice 3)
- $S_{ys} = 0.577S_y = 0.577 \times 531 \text{ MPa} = 306 \text{ MPa}$ (usando TECO/von Mises, ec. 4.35, capítulo 4)
- $S_e' = 0.5S_u = 0.5 \times 627 \text{ MPa} = 313.5 \text{ MPa}$ (ecuación 5.2, capítulo 5)

Factores que reducen la resistencia a la fatiga:

- Como se dijo S_n (y por lo tanto estos factores) deben calcularse para flexión
 - $K_a = 0.77$, acero, $S_u = 627 \text{ MPa} = 91 \text{ ksi}$; asumiendo árbol mecanizado (figura 5.11)
 - $K_b = 0.889$, ecuación 5.21 para flexión, **asumiendo $d = 20 \text{ mm}$** , que es el diámetro escogido en el ejemplo 7.1, con $d_e = d$ (flexión giratoria, ecuación 5.23.a)
 - $K_c = 0.753$, trabajando con una confiabilidad de 99.9% (tabla 5.2)
 - $K_d = 1$, la temperatura en el árbol es menor de 250 °C (ecuación 5.26)
 - $K_e = 1$, no se prevé corrosión ni otros factores que reduzcan la resistencia
 - $K_{car} = 1$, flexión
- $$K = (0.77)(0.889)(0.753)(1)(1)(1) = 0.516$$

Resistencia a la fatiga corregida:

- $S_n = KS_e' = 0.516 \times 313.5 \text{ MPa} = 161.8 \text{ MPa}$ (ecuación 5.50)

9.5 Factores de concentración de esfuerzos

- $K_{t(T)} \approx 1.95$, $K_{t(M)} \approx 2.45$ y $K_{t(F)} \approx 2.6$ (extrapolación). El punto crítico pertenece a una sección con un hombro. Estos coeficientes se calculan **asumiendo el radio de redondeo y el diámetro mayor del escalón**, de la figura A-5.10, para torsión, A-5.11, para flexión, y A-5.12, para carga axial, con $r/d = (0.5 \text{ mm})/(20 \text{ mm}) = 0.025$ y $D/d = (25 \text{ mm})/(20 \text{ mm}) = 1.25$.
- $\sqrt{a_{(F)}} = \sqrt{a_{(M)}} = 0.346 \text{ mm}^{0.5}$, $\sqrt{a_{(T)}} = 0.277 \text{ mm}^{0.5}$, acero, $S_u = 627 \text{ MPa}$ (tabla 5.3)
- $q_{(F)} = q_{(M)} = 1/\left(1 + \sqrt{a_{(M)}}/\sqrt{r}\right) = 1/\left(1 + 0.346 \text{ mm}^{0.5}/\sqrt{0.5 \text{ mm}}\right) = 0.671$ (ecuación 5.31)
- $q_{(T)} = 1/\left(1 + \sqrt{a_{(T)}}/\sqrt{r}\right) = 1/\left(1 + 0.277 \text{ mm}^{0.5}/\sqrt{0.5 \text{ mm}}\right) = 0.719$ (ecuación 5.31)
- $K_{f(M)} = 1 + q_{(M)}(K_{t(M)} - 1) = 1 + 0.671(2.45 - 1) = 1.97$ (ecuación 5.30)
- $K_{ff(M)} = K_{f(M)} = 1.97$, para vida infinita (ecuación 5.34)
- $K_{f(F)} = 1 + q_{(F)}(K_{t(F)} - 1) = 1 + 0.671(2.6 - 1) = 2.07$ (ecuación 5.30)
- $K_{f(T)} = 1 + q_{(T)}(K_{t(T)} - 1) = 1 + 0.719(1.95 - 1) = 1.68$ (ecuación 5.30)
- Se toma $K_{fm(F)} = K_{f(F)} = 2.07$ y $K_{fm(T)} = K_{f(T)} = 1.68$ (ec. 5.32 y 5.33)

9.6 Diámetro – Método von Mises

$$\tau_a = 0 \quad \tau_m = K_{fm(T)} S_{ms} = \frac{1.68 \times 16 \times 79.58 \text{ N} \cdot \text{m}}{\pi d^3} = \frac{680.9 \text{ N} \cdot \text{m}}{d^3}$$

$$\sigma_m = K_{fm(F)} S_{m(F)} + K_{fm(M)} S_{m(M)} = -\frac{2.07 \times 4 \times 241.14 \text{ N}}{\pi d^2} = -\frac{635.5 \text{ N} \cdot \text{m}}{d^2}$$

$$\sigma_a = K_{ff(F)} S_{a(F)} + K_{ff(M)} S_{a(M)} = \frac{1.97 \times 32 \times 58.95 \text{ N} \cdot \text{m}}{\pi d^3} = \frac{1183 \text{ N} \cdot \text{m}}{d^3}$$

$$\frac{1}{1.5} = \frac{\sqrt{\left(\frac{-635.5}{(d[\text{m}])^2}\right)^2} + 3\left(\frac{680.9}{(d[\text{m}])^3}\right)^2}{531 \times 10^6} + \frac{\sqrt{\left(\frac{1183}{(d[\text{m}])^3}\right)^2}}{161.8 \times 10^6},$$

- de donde $d = 24.3 \text{ mm}$ (diámetro mínimo del escalón donde se aloja el rodamiento)
- Se estandariza con base en los diámetros internos estándar de rodamientos de bolas (... , 17, 20, 25, 30, ...); entonces, $d = 25 \text{ mm}$.
- K_b fue asumido con $d = 20 \text{ mm}$
- Iterando: $K_b = 0.870$, $K = 0.505$, $S_n = 158.2 \text{ MPa}$, $d = 24.4 \text{ mm}$, el cual es menor que el diámetro estándar seleccionado. Por lo tanto: $d = 25 \text{ mm}$

9.7 Diámetro – Método Faires

$$[K_{ff} S_a] = \frac{K_{ff(F)} S_{a(F)}}{0.7} + K_{ff(M)} S_{a(M)} = K_{ff(M)} S_{a(M)} = \frac{1.97 \times 32 \times 58.95 \text{ N} \cdot \text{m}}{\pi d^3} = \frac{1183 \text{ N} \cdot \text{m}}{d^3}$$

$$S_{nMF} = K_a K_b K_c K_d K_e S_e' = (0.77)(0.870)(0.753)(1)(1) \times 313.5 \text{ MPa} = 158.2 \text{ MPa}.$$

Como se dijo, no se incluye K_{car} . Además, se toma el valor de K_b calculado con $d = 25 \text{ mm}$

$$\frac{1}{1.5} = \sqrt{\left(\frac{1183 \text{ N} \cdot \text{m}}{(158.2 \times 10^6 \text{ Pa}) d^3} \right)^2 + \left(\frac{16 \times 79.58 \text{ N} \cdot \text{m}}{(306 \times 10^6 \text{ Pa}) \pi d^3} \right)^2},$$

$$d = \left\{ 1.5 \sqrt{\left(\frac{1183 \text{ N} \cdot \text{m}}{158.2 \times 10^6 \text{ N/m}^2} \right)^2 + \left(\frac{16 \times 79.58 \text{ N} \cdot \text{m}}{(306 \times 10^6 \text{ N/m}^2) \pi} \right)^2} \right\}^{1/3} = 22.5 \text{ mm}.$$

- Este diámetro es menor que el obtenido con el método von Mises (24.4 mm)
- Estandarizando se obtiene nuevamente $d = 25 \text{ mm}$.

Este cálculo por fatiga arrojó un diámetro mayor que aquel obtenido en el cálculo por cargas dinámicas. El diámetro definitivo del árbol dependerá también de las condiciones de rigidez, las cuales son normalmente más exigentes