

ESPECIFICACIONES DE LA RESPUESTA TRANSITORIA

En muchos casos prácticos, las características de desempeño deseadas del sistema de control se especifican en términos de cantidades en el dominio del tiempo. Los sistemas que pueden almacenar energía no responden instantáneamente y exhiben respuestas transitorias cada vez que están sujetos a entradas o perturbaciones.

Con frecuencia, las características de desempeño de un sistema de control se especifican en términos de la respuesta transitoria para una entrada escalón unitario, dado que ésta es fácil de generar y es suficientemente drástica. (Si se conoce la respuesta a una entrada escalón, es matemáticamente posible calcular la respuesta para cualquier entrada.)

La respuesta transitoria de un sistema para una entrada escalón unitario depende de las condiciones iniciales. Por conveniencia al comparar respuestas transitorias de varios sistemas, es una práctica común usar la condición inicial estándar de que el sistema está en reposo al inicio, por lo cual la salida y todas las derivadas con respecto al tiempo son cero. De este modo, las características de respuesta se comparan con facilidad.

La respuesta transitoria de un sistema de control práctico exhibe con frecuencia oscilaciones amortiguadas antes de alcanzar el estado estable. Al especificar las características de la respuesta transitoria de un sistema de control para una entrada escalón unitario, se especifican las siguientes características:

1. Tiempo de retardo (t_d): es el tiempo requerido para que la respuesta alcance la primera vez la mitad del valor final.

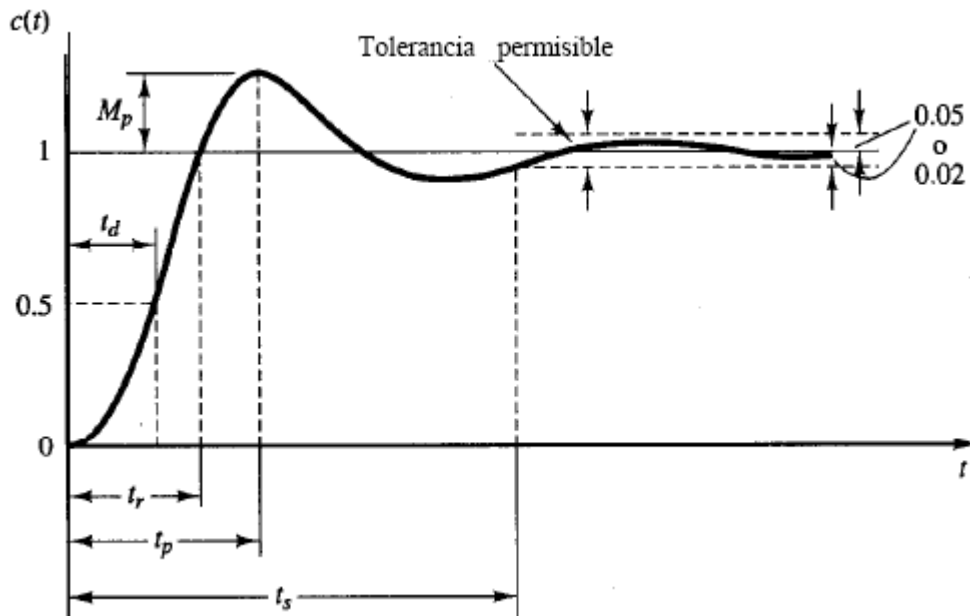


Figura 1. Curva de respuesta escalón unitario con las especificaciones

2. Tiempo de levantamiento (t_r): es el tiempo requerido para que la respuesta pase del 10 al 90%, del 5 al 95% o del 0 al 100% de su valor final. Para sistemas subamortiguados de segundo orden, por lo

común se usa el tiempo de levantamiento de 0 a 100%. Para sistemas sobreamortiguados, suele usarse el tiempo de levantamiento de 10 a 90%. Se obtiene haciendo $c(t) = 1$:

$$c(t_r) = 1 = 1 - e^{-\zeta\omega_n t_r} \left(\cos \omega_d t_r + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \operatorname{sen} \omega_d t_r \right)$$

de donde se obtiene:

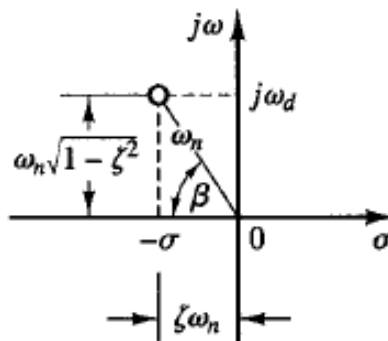
$$\cos \omega_d t_r + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \operatorname{sen} \omega_d t_r = 0$$

$$\tan \omega_d t_r = -\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} = -\frac{\omega_d}{\sigma}$$

por lo tanto el tiempo de levantamiento, t_r , es:

$$t_r = \frac{1}{\omega_d} \tan^{-1} \left(\frac{\omega_d}{-\sigma} \right) = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}$$

donde β se obtiene de:



3. Tiempo pico(t_p): es el tiempo requerido para que la respuesta alcance el primer pico del sobrepaso. Se obtiene diferenciando $c(t)$ con respecto al tiempo y suponiendo que esta derivada es igual a cero. Por tanto,

$$\begin{aligned} \frac{dc}{dt} &= \zeta e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \operatorname{sen} \omega_d t \right) \\ &+ e^{-\zeta\omega_n t} \left(\omega_d \operatorname{sen} \omega_d t + \frac{\zeta\omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cos \omega_d t \right) \end{aligned}$$

$$\left. \frac{dc}{dt} \right|_{t=t_p} = (\operatorname{sen} \omega_d t_p) \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t_p} = 0$$

De donde se tiene

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \omega_d t_p &= 0 \\ \omega_d t_p &= 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots \end{aligned}$$

El tiempo pico, es el primero de ellos:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

4. Sobrepaso máximo (M_p): el valor pico máximo de la curva de respuesta, medido a partir de la unidad. Si el valor final en estado estable de la respuesta es diferente de la unidad, es común usar el porcentaje de sobrepaso máximo. Se define mediante

$$\text{Porcentaje de sobrepaso máximo} = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\%$$

La cantidad de sobrepaso máximo (en porcentaje) indica de manera directa la estabilidad relativa del sistema.

$$\begin{aligned} M_P &= c(t_p) - 1 \\ &= e^{-\xi\omega_n(\pi/\omega_d)} \left(\cos \pi + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \text{sen } \pi \right) \\ &= e^{-(\sigma/\omega_d)\pi} = e^{-(\xi/\sqrt{1-\xi^2})\pi} \end{aligned}$$

El porcentaje de sobrepaso máximo es $e^{-(\sigma/\omega_d)\pi} \times 100$.

5. Tiempo de asentamiento (t_s): el tiempo de asentamiento es el tiempo que se requiere para que la curva de respuesta alcance un rango alrededor del valor final del tamaño especificado por el porcentaje absoluto del valor final (por lo general, de 2 a 5%) y permanezca dentro de él. El tiempo de asentamiento se relaciona con la mayor constante de tiempo del sistema de control. Los objetivos del diseño del sistema en cuestión determinan cuál criterio de error en porcentaje usar.

La velocidad de decaimiento de la respuesta transitoria depende del valor de la constante de tiempo $1/\xi\omega_n$. Para un ω_n , determinado, el tiempo de asentamiento t_s es una función del factor de amortiguamiento relativo ξ . Para el mismo ω_n y para un rango de ξ entre 0 y 1, el tiempo de asentamiento t_s para un sistema ligeramente amortiguado es más grande que para un sistema amortiguado de manera moderada. Para un sistema sobreamortiguado, el tiempo de asentamiento t_s se vuelve más grande debido al inicio lento de la respuesta.

Cuando se comparan las respuestas de los sistemas, por lo general se define el tiempo de asentamiento t_s como:

$$t_s = 4T = \frac{4}{\sigma} = \frac{4}{\xi\omega_n} \quad (\text{criterio del 2\%})$$

o bien

$$t_s = 3T = \frac{3}{\sigma} = \frac{3}{\xi\omega_n} \quad (\text{criterio del 5\%})$$

Observe que el tiempo de asentamiento es inversamente proporcional al producto del factor de amortiguamiento relativo y la frecuencia natural no amortiguada del sistema. Dado que el valor de ξ se determina, por lo general, a partir de los requerimientos del sobrepaso máximo permisible, el tiempo de asentamiento se determina principalmente mediante la frecuencia natural no amortiguada ω_n . Esto

significa que la duración del transitorio puede variarse, sin modificar el sobrepaso máximo, ajustando la frecuencia natural no amortiguada ω_n .

Las especificaciones en el dominio del tiempo que se proporcionaron son muy importantes, dado que casi todos los sistemas de control son sistemas en el dominio del tiempo; es decir, deben presentar respuestas de tiempo aceptables. (Esto significa que el sistema de control debe modificarse hasta que la respuesta transitoria sea satisfactoria.)

Obsérvese que, si se especifican los valores de t_d , t_r , t_p , t_s y M_p , la forma de la curva de respuesta queda prácticamente determinada.

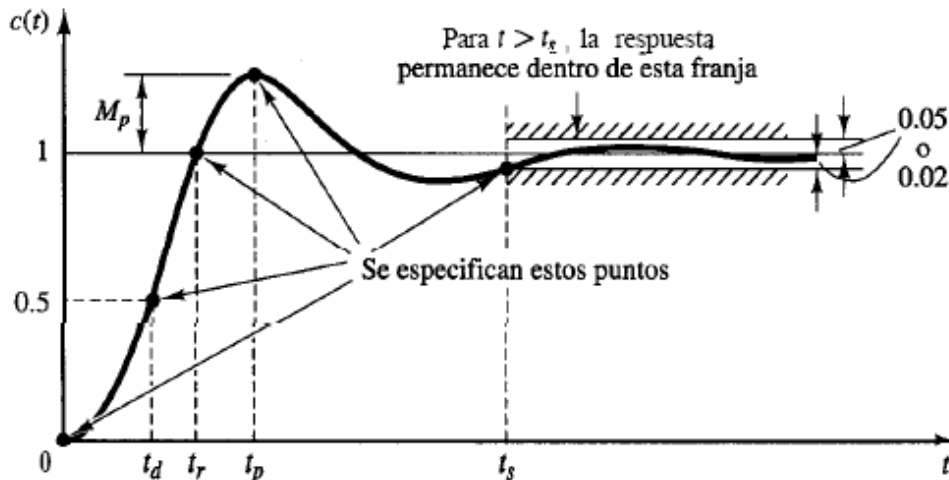


Figura 2. Especificaciones de la respuesta transitoria.

Observe que todas estas especificaciones no necesariamente se aplican a cualquier caso determinado. Por ejemplo, para un sistema sobreamortiguado no se aplican los términos tiempo pico y sobrepaso máximo. (En los sistemas que producen errores en estado estable para entradas escalón, este error debe conservarse dentro de un nivel de porcentaje especificado)

Algunos comentarios sobre las especificaciones de la respuesta transitoria

Excepto para ciertas aplicaciones en las que no se pueden tolerar oscilaciones, es conveniente que la respuesta transitoria sea suficientemente rápida y amortiguada. Por tanto, para una respuesta transitoria conveniente de un sistema de segundo orden, el factor de amortiguamiento relativo debe estar entre 0,4 y 0,8. Valores pequeños de ξ ($\xi < 0,4$) producen un valor de sobrepaso excesivo en la respuesta transitoria, y un sistema con un valor grande de ξ ($\xi > 0,8$) responden con lentitud.

En otras palabras, tanto el sobrepaso máximo como el tiempo de levantamiento no pueden hacerse más pequeños en forma simultánea. Si uno de ellos se reduce, el otro necesariamente aumenta.