Vectores, Rectas y Planos.

http://www.cidse.itcr.ac.cr/cursos-linea/

Walter Mora F.
wmora2@yahoo.com.mx
Centro de Recursos Virtuales - CRV
Revista digital Matemática, Educación e Internet
Escuela de Matemática
Instituto Tecnológico de Costa Rica.

CONTENIDO

CAPITULO 1

GEOMETRIA VECTORIAL

1.1 INTRODUCIÓN

Los vectores, que eran utilizados en mécanica en la composición de fuerzas y velocidades ya desde fines del siglo XVII, no tuvieron repercusión entre los matemáticos hasta el siglo XIX cuando Gauss usa implícitamente la suma vectorial en la representación geométrica de los números complejos en el plano y cuando Bellavitis desarrolla sus “equipolencias", un conjunto de operaciones con cantidades dirigidas que equivale al cálculo vectorial de hoy.

El paso siguiente lo da Hamilton, quien inicia el estudio de los vectores. Se le debe a él el nombre de ‘vector’ producto de la creación de un sistema de números complejos de cuatro unidades, denominado “cuaterniones”, muy usados hoy en día para el trabajo con rotaciones de objetos en el espacio 3D. Actualmente, casi todas las áreas de la física son representadas por medio del lenguaje de los vectores.

En este tema, estudiaremos los vectores en $\mathbb{R}^n$, las operaciones y sus propiedades. Además de algunos ejemplos, se desarrollan actividades interactivas en 3D (en la versión en internet) para facilitar la apropiación de los conceptos estudiados.

1.2 VECTORES

A partir de la representación de $\mathbb{R}$, como una recta numérica, los elementos $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ se asocian con puntos de un plano definido por dos rectas perpendiculares que al mismo tiempo definen un sistema de coordenadas rectangulares donde la interseccón representa a $(0,0)$ y cada (a,b) se asocia con un punto de coordenada a en la recta horizontal (eje X) y la coordenada b en la recta vertical (eje Y).

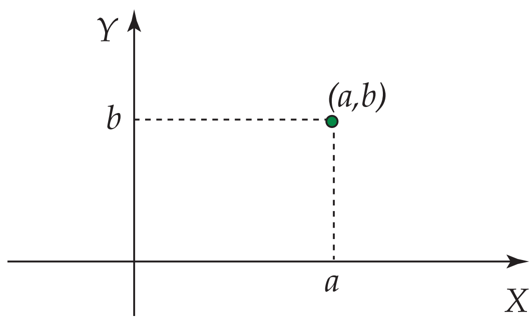

Figura 1.1 Punto (a,b)

Analógamente, los elementos $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ se asocian con puntos en el espacio tridimensional definido con tres rectas mutuamente perpendiculares. Estas rectas forman los ejes del sistema de coordenadas rectangulares (ejes X, Y y Z).

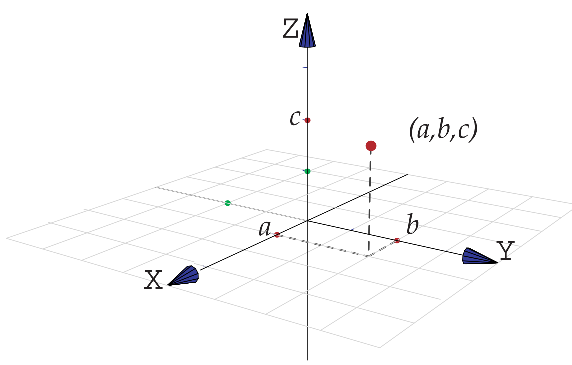

Figura 1.2 Punto (a,b,c)

Los vectores se pueden representar mediante segmentos de recta dirigidos, o flechas, en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$. La dirección de la flecha indica la dirección del vector y la longitud de la flecha determina su magnitud.

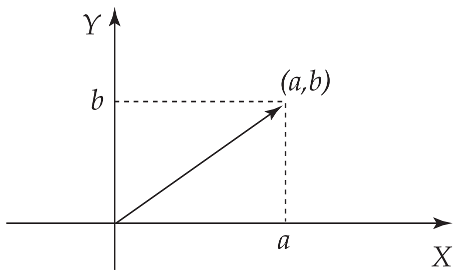

Figura 1.3 Vector (a,b)

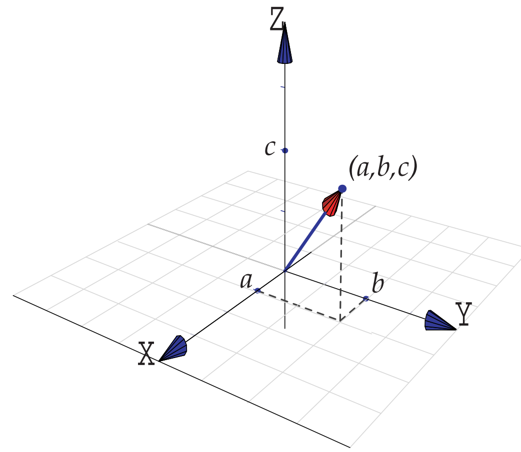

Figura 1.4 Vector (a,b,c)

1.3 NOTACIÓN

Los vectores se denotarán con letras minúsculas con un flecha arriba tales como $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{y}$, $\overrightarrow{z}$. Los puntos se denotarán con letras mayúsculas tales como A, B, C. En el contexto de los vectores, los números reales serán llamados *escalares* y se denotarán con letras minúsculas cursivas tales como α, β, k.

- Si el punto inicial de un vector $\overrightarrow{v}$ es A y el punto final es B, entonces

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$$

El vector nulo se denota con $\overrightarrow{0} = (0,0,\cdots,0)$

Para las subsecciones que siguen y con el afán de generalizar, estudiaremos las propiedades de los vectores en el $\mathbb{R}^n$. Un vector en el $\mathbb{R}^n$ es un ene-tuple $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ con cada $x_i \in \mathbb{R}$. A x_i se le llama componente i-ésima del vector.

1.4 OPERACIONES BÁSICAS

1.5 IGUALDAD

Dos vectores son iguales si tienen, en el mismo orden, los mismos componentes.

Definición 1

Consideremos los vectores $\overrightarrow{v}=(v_1,v_2,\cdots,v_n)\in\mathbb{R}^n$ *y* $\overrightarrow{w}=(w_1,w_2,\cdots,w_n)\in\mathbb{R}^n$. *Decimos que* $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{w}$ *si y sólo si* $v_1=w_1,v_2=w_2,\cdots,v_n=w_n$.

Ejemplo 1

Sea $\overrightarrow{v}=(1,3,4)$ *y* $\overrightarrow{w}=(3,1,4)$ *, entonces* $\overrightarrow{v}\neq\overrightarrow{w}$.

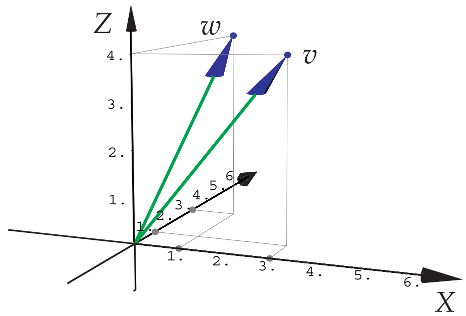

Figura 1.5

1.6 SUMA Y RESTA

La suma y resta se hace componente a componente

Definición 2

Consideremos los vectores $\overrightarrow{v}=(v_1,v_2,\cdots,v_n)\in\mathbb{R}^n$ *y* $\overrightarrow{w}=(w_1,w_2,\cdots,w_n)\in\mathbb{R}^n$.

$$\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}=(v_1+w_1,v_2+w_2,\cdots,v_n+w_n)$$

$$\overrightarrow{v}-\overrightarrow{w}=(v_1-w_1,v_2-w_2,\cdots,v_n-w_n)$$

Ejemplo 2

Sea $\overrightarrow{v}=(1,3,4)$ *y* $\overrightarrow{w}=(3,1,4)$ *, entonces*

$$i.)\ \overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}=(4,4,8)$$

$$ii.)\ \overrightarrow{v}-\overrightarrow{w}=(-2,2,0)$$

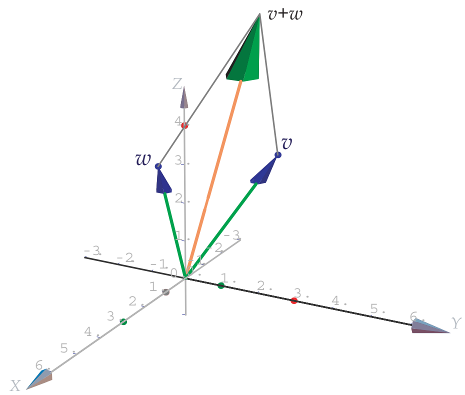

Figura 1.6

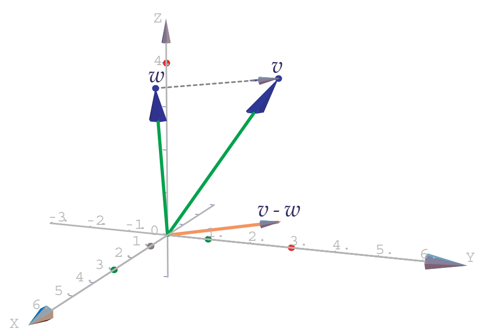

Figura 1.7

1.7 MULTIPLICACIÓN POR UN ESCALAR

Un escalamiento de un vector, por un factor k, se logra multiplicando cada componente por el mismo número real k

Definición 3

Consideremos el vector $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ *y el escalar* $k \in \mathbb{R}$*, entonces*

$$k\overrightarrow{v} = (kv_1, kv_2, \cdots, kv_n)$$

Ejemplo 3

Sea $\overrightarrow{v} = (1,3,4)$ *entonces*

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{v} &= (2,6,8) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{v} &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{4}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

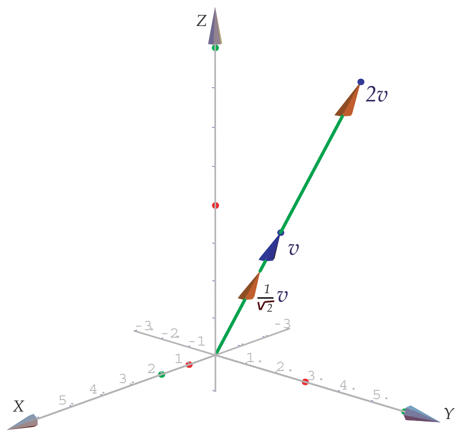

Figura 1.8

1.8 PROPIEDADES DE LOS VECTORES

Teorema 1

Consideremos el vector $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^n$ *y* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *entonces*

1. $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{v}$
2. $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{-v} = \overrightarrow{0}$
3. $0\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$
4. $1\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}$
5. $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v}$
6. $(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} + (\overrightarrow{w} + \overrightarrow{u})$
7. $\alpha(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \alpha\overrightarrow{v} + \alpha\overrightarrow{w}$
8. $(\alpha+\beta)\overrightarrow{v} = \alpha\overrightarrow{v} + \beta\overrightarrow{v}$

9. $(\alpha\beta)\,\overrightarrow{v} = \alpha\,(\beta\,\overrightarrow{v})$

Ejemplo 4

$$\begin{aligned} i.)\ (1,1,3)+5\,(2,2,3)+2\,(0,1,2) &= (1,1,3)+[5\,(2,2,3)+2\,(0,1,2)] \\ &= (1,1,3)+(10,12,19) \\ &= (11,13,22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ii.)\ (1,1,3)+t\,(2,2,3)+s\,(0,1,2) &= (1,1,3)+[t\,(2,2,3)+s\,(0,1,2)] \\ &= (1,1,3)+(2t,\ 2t+s,\ 3t+2s) \\ &= (1+2t,\ 1+2t+s,\ 3+3t+2s) \end{aligned}$$

1.9 PRODUCTO PUNTO Y NORMA

El producto punto (o escalar) es una operación entre vectores que devuelve un escalar. Esta operación es introducida para expresar algebraicamente la idea geométrica de magnitud.

Definición 4

Consideremos los vectores $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ *y* $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2, \cdots, w_n) \in \mathbb{R}^n$. *El producto punto (o escalar)* $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}$ *se define de la siguiente manera*

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + \cdots + v_n \cdot w_n \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 5

i.) Sean $\overrightarrow{v} = (-1,3,4)$ *y* $\overrightarrow{w} = (1,0,\sqrt{2})$ *entonces*

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = -1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2} - 1$$

ii.) Sea $\overrightarrow{u} = (a,b,c)$ *entonces*

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = a^2 + b^2 + c^2$$

De aquí se deduce que $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} \geq 0$

1.10 PROPIEDADES DEL PRODUCTO PUNTO

Teorema 2

Consideremos los vectores $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces

1. $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{0} = 0$
2. $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{v}$
3. $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$
4. $(\alpha \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w} = \alpha (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w})$

• Observación: no hay propiedad asociativa pues $\overrightarrow{v} \cdot (\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{u})$ no tiene sentido dado que $\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{u}$ es un número real.

1.11 NORMA

La norma define la longitud de un vector desde el punto de vista de la geometría euclideana

Definición 5

Consideremos el vector $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n) \in \mathbb{R}^n$. La norma de $\overrightarrow{v}$ se denota $||\overrightarrow{v}||$ y se define de la siguiente manera

$$\begin{aligned} ||\overrightarrow{v}|| &= \sqrt{v \cdot v} \\ &= \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2} \end{aligned}$$

La distancia de A a B se define como $d(A,B) = ||B - A||$. De igual manera se define la distancia entre vectores.

Ejemplo 6

i.) Sea $\overrightarrow{w} = (1, 0, \sqrt{2})$ *entonces* $||w|| = \sqrt{1^2 + 0^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{3}$

ii.) La distancia de $A = (x, y, z)$ *a* $B = (1, -3, 2)$ *es* $||B - A|| = \sqrt{(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2}$

1.12 PROPIEDADES DE LA NORMA

Teorema 3

Consideremos los vectores $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^n$ *y* $\alpha \in \mathbb{R}$, *entonces*

1. $||\overrightarrow{v}|| \geq 0$ *y* $||\overrightarrow{v}|| = 0$ *si y sólo si* $\overrightarrow{v} = 0$

2. $||\alpha\overrightarrow{v}|| = |\alpha|\,||\overrightarrow{v}||$

3. $||\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}|| = ||\overrightarrow{w} - \overrightarrow{v}||$

4. $||\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}|| \leq ||\overrightarrow{v}|| + \overrightarrow{w}||$ *(desigualdad triangular)*

5. $|\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}| \leq ||\overrightarrow{v}||\,||\overrightarrow{w}||$ *(desigualdad de Cauchy-Schwarz)*

Ejemplo 7

i.) (Vectores unitarios) Sea $\overrightarrow{w} = (1,0,2)$ *entonces*

$$\left|\left|\frac{w}{||w||}\right|\right| = \left|\frac{1}{||w||}\right|\,||w|| = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$$

i.) Sea $\overrightarrow{w} = (1,0,2)$ *entonces* $||-2w|| = 2\,||w|| = 2\sqrt{5}$

Definición 6

Un vector se dice unitario si su norma es 1.

- Observe que si $\overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}$ entonces $\dfrac{w}{||w||}$ es unitario.

- El vector $\overrightarrow{w} = (\cos\theta, \sin\theta)$ es unitario.

1.13 ÁNGULO ENTRE VECTORES

A partir de la *Ley de los cosenos* podemos establecer una relación entre el producto punto, normas y ángulos, como se muestra a continuación.

Ley de los cosenos. Si a, b y c son las longitudes de los lados de un triángulo arbitrario, se tiene la relación

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

donde θ es el ángulo entre los lados de longitud a y b.

Para visualizar esta ley usando vectores, consideremos el triángulo determinado por los vectors $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$, como se muestra en la figura.

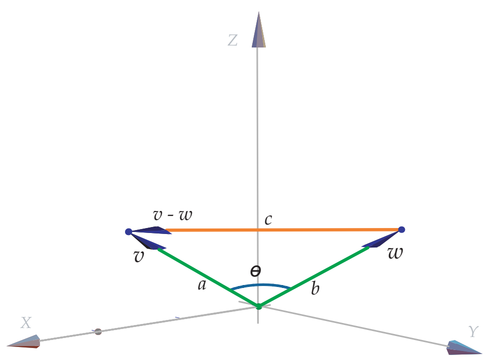

Figura 1.9

entonces

$$||\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}|| = ||\overrightarrow{v}||^2 + ||\overrightarrow{w}||^2 - 2||\overrightarrow{v}||\,||\overrightarrow{w}||\cos\theta \quad (*)$$

ahora, puesto que

$$||\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}||^2 = (\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}) \cdot (\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}) = ||\overrightarrow{v}||^2 + ||\overrightarrow{w}||^2 - 2\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}$$

entonces, despejando en (*) obtenemos

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = ||\overrightarrow{v}||\,||\overrightarrow{w}||\cos\theta$$

En el caso del $\mathbb{R}^n$, si $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^n$ son vectores no nulos, entonces usando la desigualdad d Cauchy-Schwarz

$$|\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w}| \leq ||\overrightarrow{v}||\,||\overrightarrow{w}||$$

y la propiedad del valor absoluto $|x| \leq k \Leftrightarrow -k \leq x \leq k$ para un número $k \geq 0$, obtenemos

$$-||\overrightarrow{v}||\,||\overrightarrow{w}|| \leq \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w} \leq ||\overrightarrow{v}||\,||\overrightarrow{w}||$$

y entonces

$$-1 \leq \frac{\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w}}{||\overrightarrow{v}||\,||\overrightarrow{w}||} \leq |1$$

Se puede garantizar que para $\overrightarrow{v},\overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^n$ vectores no nulos, es posible encontrar un único $\theta \in [0,\pi]$ tal que

$$\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w} = ||\overrightarrow{v}||\,||\overrightarrow{w}||\cos\theta$$

Formalmente

Definición 7

Si $\overrightarrow{v},\overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^n$ son vectores no nulos, se dice que el único $\theta \in [0,\pi]$ tal que

$$\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w} = ||\overrightarrow{v}||\,||\overrightarrow{w}||\cos\theta$$

es el ángulo entre $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$

- Notación: $\angle\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}$ denota el ángulo entre $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$

Como consecuencia tenemos una caracterización para vectores ortogonales. Recordemos que dos vectores son ortogonales si al menos uno de ellos es nulo o si el ángulo entre ellos es $\pi/2$. Entonces

Teorema 4

Los vectores $\overrightarrow{v},\overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^n$ son ortogonales si y sólo si $\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w} = 0$

Ejemplo 8

i.) *Sean $\overrightarrow{w} = (1,0,\sqrt{2})$ y $\overrightarrow{v} = (-2,1,\sqrt{2})$ entonces $\overrightarrow{w}$ y $\overrightarrow{v}$ son ortogonales pues* $\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{v} = -2+2 = 0$

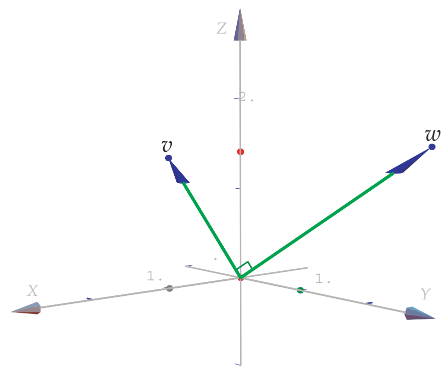

Figura 1.10

ii.) *Sean* $\overrightarrow{w} = (1, 0, \sqrt{2})$ *y* $\overrightarrow{v} = (-2, 1, 1)$ *entonces el ángulo entre* $\overrightarrow{w}$ *y* $\overrightarrow{v}$ *es*

$$\theta = \arccos\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right) \approx 1.27795$$

dado que

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}}{||\overrightarrow{v}||\,||\overrightarrow{w}||} \implies \theta = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}}{||\overrightarrow{v}||\,||\overrightarrow{w}||}\right) = \arccos\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$$

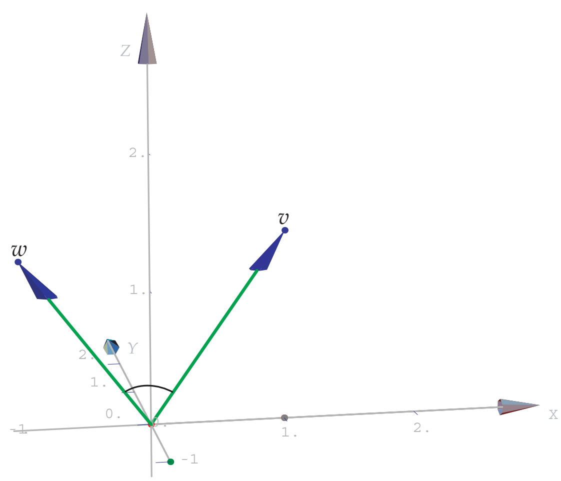

Figura 1.11

iii.) Sean $\overrightarrow{v}=(1,-1,0)$ *y* $\overrightarrow{w}=(1,1,0)$. *Consideremos el problema de encontrar un vector* $\overrightarrow{u}\in\mathbb{R}^3$ *que cumpla las tres condiciones siguientes*

$$\overrightarrow{u}\perp\overrightarrow{v},\quad ||\overrightarrow{u}||=4,\quad \angle\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}=\frac{\pi}{3}$$

Para resolver el problema, supongamos que $\overrightarrow{u}=(x,y,z)$, *entonces tenemos que*

$$\left\{\begin{array}{rcl}\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} & = & 0\\ ||\overrightarrow{u}|| & = & 4\\ \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w} & = & ||\overrightarrow{u}||\,||\overrightarrow{w}||\cos\frac{\pi}{3}\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl}x-y & = & 0\\ x^2+y^2+z^2 & = & 16\\ x+y & = & 4\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{3}\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl}x & = & y\\ 2x^2+z^2 & = & 16\\ x & = & 2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{3}\end{array}\right.$$

de donde finalmente obtenemos que

$$\overrightarrow{u}=\left(2\sqrt{2},2\sqrt{2},\pm4\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

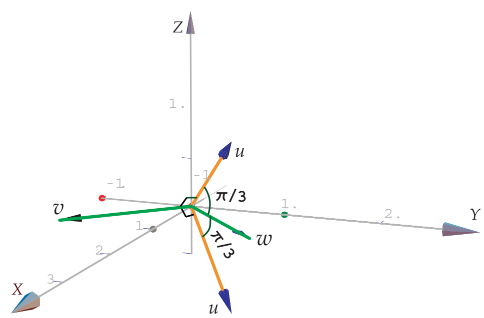

Figura 1.12

1.14 PARALELISMO, PERPENDICULARIDAD, COSENOS DIRECTORES.

Definición 8

Dos vectores $\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\in\mathbb{R}^n$ *distintos de cero*

1. *Son paralelos si el ángulo entre ellos es* 0 *o* π. *En este caso*

$$\overrightarrow{u}=\lambda\overrightarrow{v},\quad \lambda\in\mathbb{R}$$

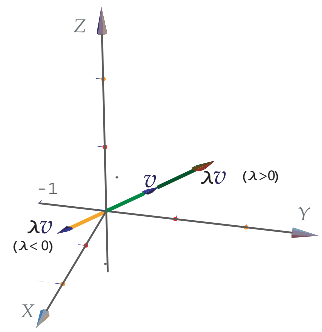

Figura 1.13

2. *Son perpendiculares si el ángulo entre ellos es* $\pi/2$. *En este caso*

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0$$

3. *Los cosenoss directores del vector* $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{OP}=(w_1,w_2,w_3)$ *son*

$$\cos\alpha=\frac{w_1}{||\overrightarrow{w}||},\quad \cos\beta=\frac{w_2}{||\overrightarrow{w}||},\quad \cos\gamma=\frac{w_3}{||\overrightarrow{w}||}$$

donde α, β, γ *son los ángulos directores de* $\overrightarrow{w}$

α*: ángulo entre* $\overrightarrow{OP}$ *y la parte positiva del eje X*

β*: ángulo entre* $\overrightarrow{OP}$ *y la parte positiva del eje Y*

γ*: ángulo entre* $\overrightarrow{OP}$ *y la parte positiva del eje Z*

- Observe que si $\overrightarrow{w}$ es unitario, entonces $\overrightarrow{w}=(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$

1.15 PROYECCIÓN ORTOGONAL

Geométricamente lo que queremos es determinar un vector que se obtiene al proyectar ortogonalmente el vector $\overrightarrow{u}\neq 0$ sobre el vector $\overrightarrow{w}$. Si denotamos a este vector con $\text{proy}_{\overrightarrow{w}}^{\overrightarrow{u}}$ entonces, de acuerdo con la figura, se debe cumplir que

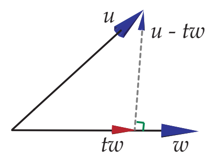

Figura 1.14

$$\left\{\begin{array}{rcl} \text{proy}_{\overrightarrow{w}}^{\overrightarrow{u}} & = & t\,\overrightarrow{w} \\ \overrightarrow{w}\cdot(\overrightarrow{u}-t\,\overrightarrow{w}) & = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \text{proy}_{\overrightarrow{w}}^{\overrightarrow{u}} & = & t\,\overrightarrow{w} \\ \overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{u}-\overrightarrow{w}\cdot t\,\overrightarrow{w} & = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \text{proy}_{\overrightarrow{w}}^{\overrightarrow{u}} & = & t\,\overrightarrow{w} \\ t = & = & \frac{\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{u}}{\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{w}} \end{array}\right.$$

y finalmente

$$\text{proy}_{\overrightarrow{w}}^{\overrightarrow{u}} = \frac{\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{u}}{\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{w}}\,\overrightarrow{w}$$

Definición 9

Si $\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\in\mathbb{R}^n$ *con* $\overrightarrow{w}\neq 0$, *se llama proyección ortogonal de* $\overrightarrow{u}$ *sobre* $\overrightarrow{w}$ *al vector*

$$proy_{\overrightarrow{w}}^{\overrightarrow{u}} = \frac{\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{u}}{\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{w}}\,\overrightarrow{w}$$

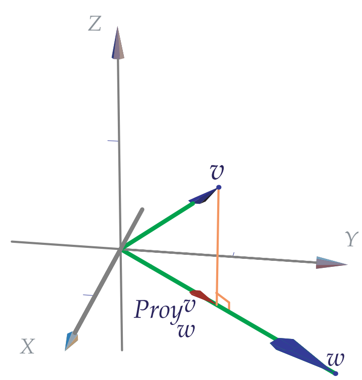

Figura 1.15

- Al vector $\overrightarrow{u}-\text{proy}_{\overrightarrow{w}}^{\overrightarrow{u}}$ se le conoce como la componente de $\overrightarrow{u}$ ortogonal a $\overrightarrow{w}$.

Ejemplo 9

Sean $\overrightarrow{u} = (5, 0, \sqrt{2})$ *y* $\overrightarrow{v} = (2, 1, \sqrt{2})$ *entonces*

$$proy_{\overrightarrow{w}}^{\overrightarrow{u}} = \frac{\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{u}}{\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{w}}\, \overrightarrow{w} = \frac{12}{7}(2, 1, \sqrt{2}) = \left(\frac{24}{7}, \frac{12}{7}, \frac{12\sqrt{2}}{7}\right)$$

$$proy_{\overrightarrow{u}}^{\overrightarrow{w}} = \frac{\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{u}}{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}}\, \overrightarrow{u} = \frac{12}{27}(5, 0, \sqrt{2}) = \left(\frac{60}{27}, 0, \frac{12\sqrt{2}}{27}\right)$$

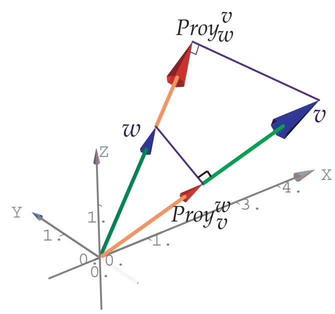

Figura 1.16

Ejemplo 10

Sean $\overrightarrow{v} = (3, 1, 0)$ *y* $\overrightarrow{w} = (2, 2, 0)$. *Consideremos el problema de determinar un vector* $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3$ *tal que* $\overrightarrow{u} = (x, y, x)$ *y que cumpla las dos condiciones*

$$proy_{\overrightarrow{v}}^{\overrightarrow{u}} = -2\overrightarrow{v}, \quad \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{w}$$

entonces

$$\left\{ \begin{array}{rcl} proy_{\overrightarrow{v}}^{\overrightarrow{u}} & = & -2\overrightarrow{v} \\ \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} & = & 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{3x+y}{10}(3, 1, 0) & = & -2(3, 1, 0) \\ 2x + 2y & = & 0 \end{array} \right.$$

de donde obtenemos, resolviendo el sistema, $x = -10,\ y = 10$, *con lo que* $\overrightarrow{u} = (-10, 10, -10)$

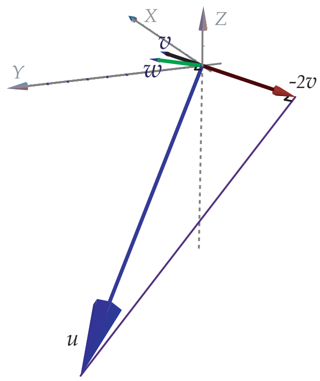

Figura 1.17

Ejemplo 11

Consideremos un triángulo determinado por los puntos $A,B,C \in \mathbb{R}^3$*. Podemos calcular la altura y el área de la siguiente manera*

Sean $\overrightarrow{u} = B - A$*,* $\overrightarrow{w} = C - A$*, entonces la altura es* $h = ||\overrightarrow{u} - proy_{\overrightarrow{w}}^{\overrightarrow{u}}||$*. Luego, como la base mide* $||\overrightarrow{w}||$ *entonces*

$$\acute{A}rea = \frac{||\overrightarrow{w}||\, ||\overrightarrow{u} - proy_{\overrightarrow{w}}^{\overrightarrow{u}}||}{2}$$

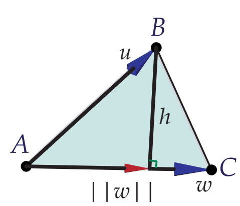

Figura 1.18

1.16 PRODUCTO CRUZ EN $\mathbb{R}^3$

El producto cruz entre dos vectores de $\mathbb{R}^3$ se define de la siguiente manera

■ **Definición 10**

Consideremos los vectores $\overrightarrow{u}=(u_1,u_2,u_3)\in\mathbb{R}^3$ *y* $\overrightarrow{v}=(v_1,v_2,v_3)\in\mathbb{R}^3$. *El producto cruz* $\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}$ *se define de la siguiente manera*

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v} &= (u_2v_3-u_3v_2)\overrightarrow{i}-(u_1v_3-u_3v_1)\overrightarrow{j}+(u_1v_2-u_2v_1)\overrightarrow{k}\\ &= (u_2v_3-u_3v_2)\overrightarrow{i}+(u_3v_1-u_1v_3)\overrightarrow{j}+(u_1v_2-u_2v_1)\overrightarrow{k}\end{aligned}$$

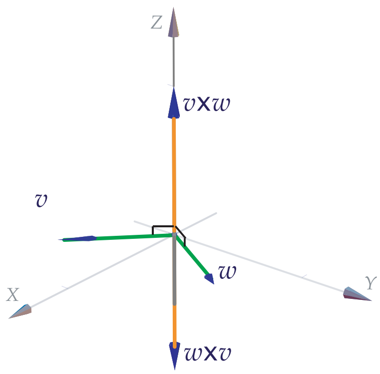

Figura 1.19

• Recordemos que $\overrightarrow{i}=(1,0,0),\ \overrightarrow{j}=(0,1,0),\ \overrightarrow{k}=(0,0,1)$, entonces también podríamos escribir

$$\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}=(u_2v_3-u_3v_2,\ u_3v_1-u_1v_3,\ u_3v_1-u_1v_3)$$

• Esta fórmula se puede escribir en la forma de un determinante como sigue

$$\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}$$

• El producto cruz $\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w}$ es un vector que es tanto perpendicular a $\overrightarrow{v}$ como a $\overrightarrow{w}$.

• En general, con las propiedades que vamos a establecer para este producto cruz, solamente sería posible definirlo en $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^7$. El vector $\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w}$ se puede ver como la dirección de una recta que sirve de eje de rotación única, perpendicular a $\overrightarrow{v}$ y a $\overrightarrow{w}$. En dos dimensiones no existe una tal dirección perpendicular a $\overrightarrow{v}$ y a $\overrightarrow{w}$. En cuatro o más dimensiones, esta dirección es ambigua. Una generalización,*en cierto sentido*, del producto cruz a n dimensiones es el producto exterior del algebra multilineal. El producto exterior $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}$ tiene magnitud $||\overrightarrow{u}||\ ||\overrightarrow{v}||\sin\theta$ pero no es un vector ni un escalar, es una área dirigida o "bivector" [Gull], [**?**]. Este producto también comparte la propiedad $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w} = -\overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{v}$

Ejemplo 12

Sean $\overrightarrow{u} = (5,0,\sqrt{2})$ *y* $\overrightarrow{v} = (2,1,\sqrt{2})$ *entonces*

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 5 & 0 & \sqrt{2} \\ 2 & 1 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = (-\sqrt{2},\ -3\sqrt{2},\ 5)$$

$$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 1 & \sqrt{2} \\ 5 & 0 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = (\sqrt{2},\ 3\sqrt{2},\ -5)$$

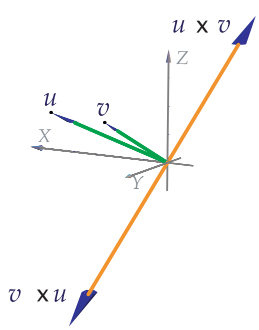

Figura 1.20

1.17 PROPIEDADES DEL PRODUCTO CRUZ

Teorema 5

Consideremos los vectores $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^n$ *y* $\alpha \in \mathbb{R}$, *entonces*

1. $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) = 0$

2. $\overrightarrow{v} \cdot (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) = 0$

3. $||\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}||^2 = ||\overrightarrow{u}||^2\, ||\overrightarrow{v}||^2 - (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})^2$ *(igualdad d Lagrange)*

4. $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = -(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u})$

5. $\overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w}$

6. $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}$

7. $\alpha(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) = (\alpha\overrightarrow{u}) \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \times (\alpha\overrightarrow{v})$

8. $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} \times \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$

9. $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{u} = 0$

• Observe que no tenemos una propiedad de asociatividad para el producto cruz.

• De la propiedad 9 y la propiedad 7 podemos deducir que si dos vectores son paralelos, el producto cruz es cero

$$\overrightarrow{u} \parallel \overrightarrow{v} \implies \overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{v} \implies \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = 0$$

• De la igualdad de Lagrange se puede deducir la fórmula

$$||\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}|| = ||\overrightarrow{u}||\, ||\overrightarrow{v}|| \sin\theta$$

• Consideremos un paralelogramo determinado por dos vectores $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3$, como se ve en la figura. Si θ es el ángulo entre estos vectores, el área del paralelogramo es

$$A = ||\overrightarrow{u}||\, ||\overrightarrow{v}|| \sin\theta = ||\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}||$$

• Consideremos un paralelelípedo en el espacio determinado por tres vectores no coplanares $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3$, como se ve en la figura. El volumen del paralelelípedo es

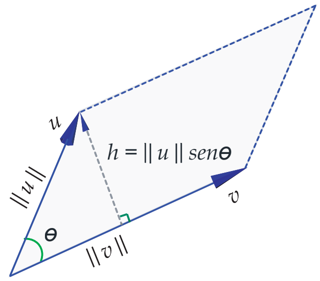

Figura 1.21

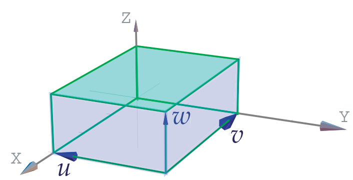

Figura 1.22

$$V = |\overrightarrow{w} \cdot (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v})| = \left| Det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \right|$$

■ **Ejemplo 13**

El área del triángulo con vértices en $P = (1,3,-2),\ Q = (2,1,4),\ R = (-3,1,6)$ *es*

$$Área = \frac{||\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{QR}||}{2} = \frac{\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -2 & 6 \\ -5 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{2} = \frac{\sqrt{1140}}{2}$$

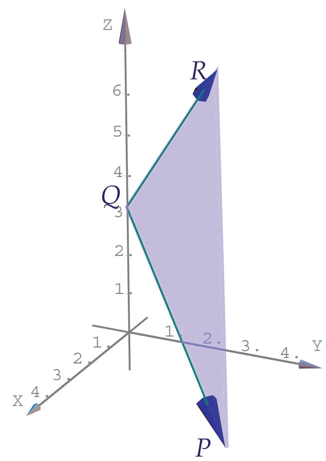

Figura 1.23

CAPITULO 2

RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO

2.1 RECTAS

Consideremos la recta L que pasa por P y por Q. Esta recta es paralela al vector $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{PQ}$, por lo tanto, dado un punto $R = (x,y,z) \in L$, se debe cumplir que

$$\overrightarrow{PR} = t\,v, \quad \text{o sea} \quad R - P = t\,\overrightarrow{v};\ \ t \in \mathbb{R}$$

de donde $(x,y,z) = P + t\,\overrightarrow{v}$.

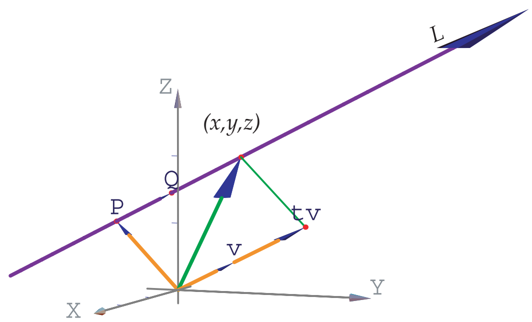

Figura 2.1

Definición 11

Si L es una recta que pasa por los puntos $P = (p_1, p_2, p_3)$, $Q = (q_1, q_2, q_3)$, y si ponemos $\overrightarrow{v} = Q - P$ entonces

1. *La ecuación vectorial de L es*

$$(x,y,z) = P + t\,\overrightarrow{v},;\quad t \in \mathbb{R}$$

2. *Despejando $x, y \wedge z$ obtenemos las ecuaciones parámetricas de L*

$$\begin{aligned} x &= p_1 + t\,v_1 \\ y &= p_2 + t\,v_2 \\ z &= p_3 + t\,v_3 \end{aligned}$$

3. *Si cada $v_i \neq 0$, despejando t obtenemos las ecuaciones simétricas de L*

$$\frac{x-p_1}{v_1} = \frac{x-p_2}{v_2} = \frac{x-p_3}{v_3}$$

Ejemplo 14

Consideremos la recta L que pasa por $P=(1,3,-2)$ y $Q=(2,1,-2)$. En este caso $\overrightarrow{v} = Q-P = (1,-2,0)$, luego

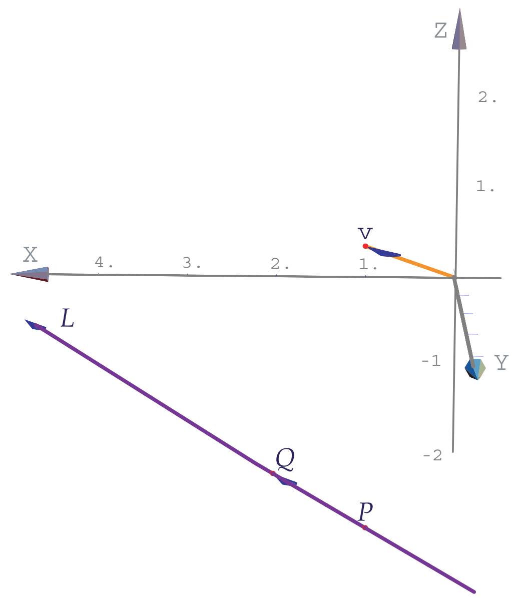

Figura 2.2

1. *Ecuación vectorial:* $(x,y,z) = (1,3,-2) + t\,(1,-2,0)$
2. *Ecuaciones paramétricas:*

$$\begin{aligned} x &= 1+t \\ y &= 3-2t \\ z &= -2 \end{aligned}$$

3. *Ecuaciones simétricas:*

$$x-1 = \frac{y-3}{-2};\;\; z=-2.$$

- Observe que el segmento que va de P a Q es el conjunto de puntos

$$\{P+t\,(Q-P);\quad t\in[0,1]\}$$

En particular, si $t=\frac{1}{2}$, obtenemos el punto medio del segmento $P+\frac{1}{2}(Q-P)=\frac{P+Q}{2}$

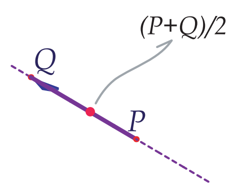

Figura 2.3

2.2 ÁNGULO,PARALELISMO, PERPENDICULARIDAD E INTERSECCIÓN

Consideremos dos rectas,

$L_1:\ (x,y,z)=P+t\overrightarrow{v};\quad t\in\mathbb{R}\ \ \wedge\ \ L_2:\ (x,y,z)=Q+s\overrightarrow{w};\quad s\in\mathbb{R}$

1. $L_1\ \parallel\ L_2$ si y sólo si $\overrightarrow{v}\ \parallel\ \overrightarrow{w}$

2. $L_1\ \perp\ L_2$ si y sólo si $\overrightarrow{v}\ \perp\ \overrightarrow{w}$

3. El ángulo entre L_1 y L_2 es igual al ángulo entre $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$

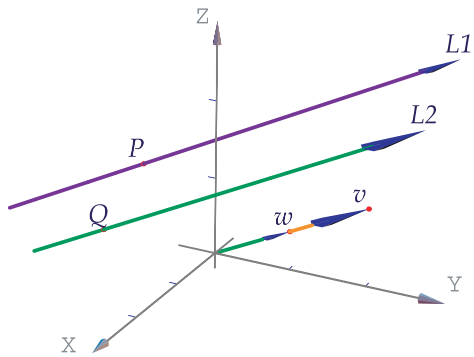

Figura 2.4

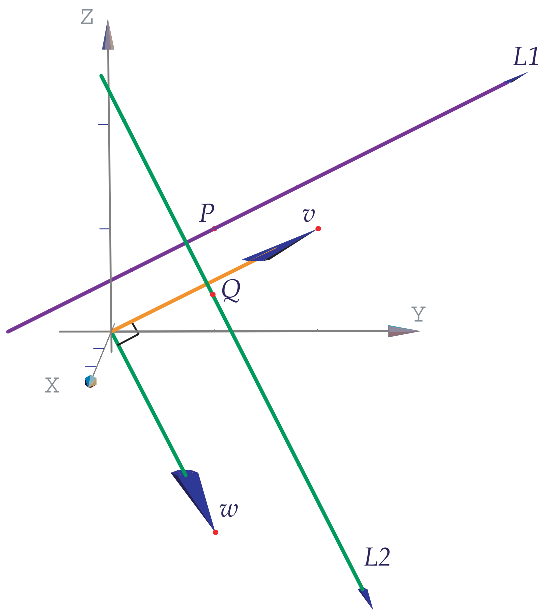

Figura 2.5

• Como podemos escoger dos puntos cualesquiera (distintos) de una recta, las ecuaciones no son únicas.

• Consideremos el sistema $P+t\,v = Q+s\,w$, o sea,

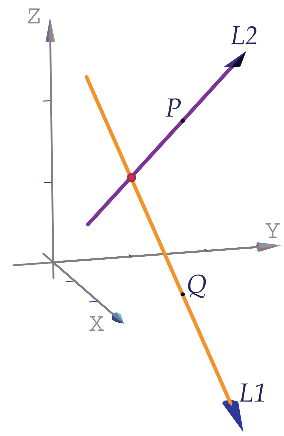

Figura 2.6

$$\begin{cases} t\,v_1 - s\,w_1 & = & q_1 - p_1 \\ t\,v_2 - s\,w_2 & = & q_2 - p_2 \\ t\,v_3 - s\,w_3 & = & q_3 - p_3 \end{cases}$$

Si este sistema tiene solución, entonces esta solución nos da el o los puntos de intersección entre L_1 y L_2. Como el sistema es lineal, puede pasar que

- hay solución única: las rectas se intersecan en un solo punto
- hay infinitas soluciones: las rectas coinciden
- no hay solución: las rectas no se intersecan

- Observe que, para el cálculo de la intersección usamos un párametro distinto en cada recta. Esto es así porque el punto de intersección puede ser que se obtenga en cada recta, con un valor de parámetro distinto, por ejemplo:

  La recta $L_1: \ (-1,3,1)+t\,(4,1,0)$ y la recta $L_2: \ (-13,1)+s\,(12,6,3)$, se intersecan en el punto $(-17,-1,1)$. Este punto se obtiene con $t=-4$ en la primera recta y con $s=-\frac{1}{3}$ en la segunda recta.

$$\begin{array}{rcl} (-17,-1,1) & = & (-1,3,1)-4\,(4,1,0) \\ (-17,-1,1) & = & (-13,1)-\frac{1}{3}\,(12,6,3) \end{array}$$

Ejemplo 15

Consideremos la recta L_1 de ecuaciones simétricas

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{2} = z-1$$

L_1 va en la dirección de $\overrightarrow{v} = (3,2,1)$

1. *L_1 es paralela a la recta L_2 :* $(x,y,z) = (1,3,-2) + t\,(6,4,2)$ *pues* $(6,4,2) = 2\overrightarrow{v}$

2. *L_1 es perpendicular a la recta L_3 :* $(x,y,z) = (0,2,-1) + t\,(-1,0,3)$ *pues* $(-1,0,3) \cdot \overrightarrow{v} = 0$

3. *L_1 no interseca a L_4 :* $(x,y,z) = (0,0,1) + t\,(1,2,1)$ *pues el sistema*

$$\begin{aligned} 3t - s &= 1 \\ 2t - 2s &= 2 \\ t - s &= 0 \end{aligned}$$

no tiene solución (hay una clara inconsistencia entre las ecuaciones 2 y 3).

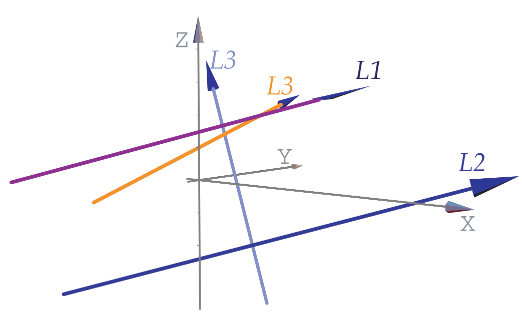

Figura 2.7

2.3 PLANOS. ECUACIÓN VECTORIAL, NORMAL Y CARTESIANA

Así como una recta esta determinada por dos puntos distintos, un plano está determinado por tres puntos no colineales.

Una manera muy conveniente de obtener una ecuación de un plano Π en $\mathbb{R}^3$, que pasa por los puntos P, Q, y R; es observar que los puntos $(x,y,z) \in \Pi$ tienen la propiedad

$$[(x,y,z)-P]\cdot\left(\overrightarrow{QP}\times\overrightarrow{RP}\right)=0$$

Esta ecuación es una ecuación normal de Π

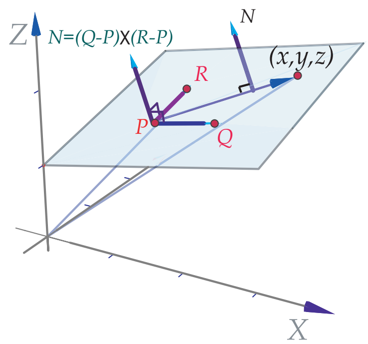

Figura 2.8

Si ponemos $\overrightarrow{N}=\overrightarrow{QP}\times\overrightarrow{RP}=(a,b,c)$ y desarrollamos la ecuación anterior, obtenemos una ecuación cartesiana de Π

$$ax+by+cz=\overrightarrow{N}\cdot P$$

Finalmente, podemos observar que si (x,y,z) está en Π, entonces

$$(x,y,z)=P+t\,\overrightarrow{QP}+s\,\overrightarrow{RP};\quad t,s\in\mathbb{R}$$

Esta es una ecuación vectorial de Π.

Definición 12

Consideremos un plano Π que pasa por los puntos no colineales P,Q,R.

1. *$\overrightarrow{N}=(a,b,c)$ es un vector normal al plano Π si $\overrightarrow{N}\cdot[(x,y,z)-P]=0$ para cualquier $(x,y,z)\in\Pi$.*

2. *Si $\overrightarrow{N}=(a,b,c)$ es un vector normal al plano Π entonces*

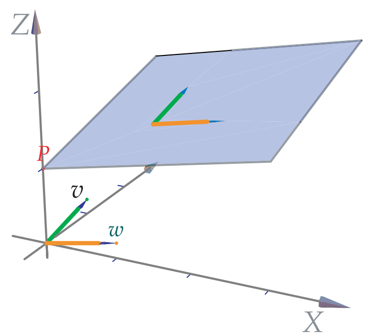

Figura 2.9

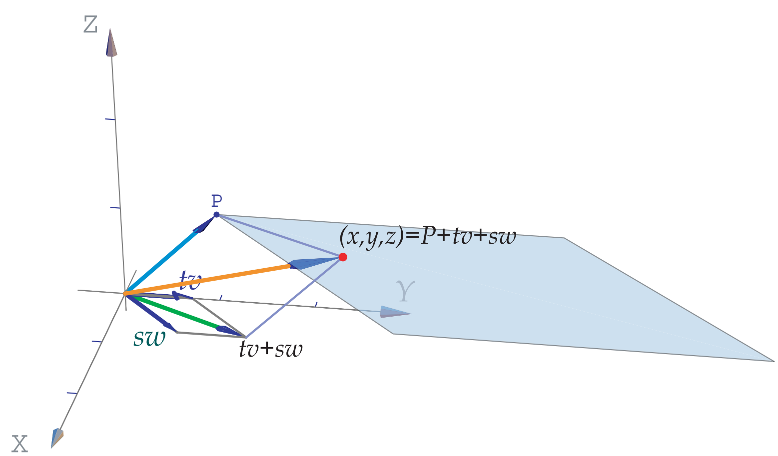

Figura 2.10

$$[(x,y,z)-P]\cdot\overrightarrow{N}=0$$

se llama una ecuación normal de Π

3. *Si* $\overrightarrow{N}=(a,b,c)$ *es un vector normal del plano* Π *entonces*

$$a\,x+b\,y+c\,z=\overrightarrow{N}\cdot P$$

se llama una ecuación cartesiana del plano Π

4. *Si* $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{PQ}$ *y si* $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{PR}$ *entonces*

$$(x,y,z)=P+t\,\overrightarrow{v}+s\,\overrightarrow{w};\quad t,s\in\mathbb{R}$$

se llama una ecuación vectorial del plano Π

- Tres puntos $P=(p_1,p_2,p_3)$, $Q=(q_1,q_2,q_3)$ y $R=(r_1,r_2,r_3)\in\mathbb{R}^3$ son *no* colineales si

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3\\ q_1 & q_2 & q_3\\ r_1 & r_2 & r_3\end{vmatrix}\neq 0$$

Ejemplo 16

Consideremos un plano Π_1 *que pasa por los puntos no colineales* $P=(1,1,1)$, $Q=(2,1,2)$ *y* $R=(0,2,-1)$

1. *Ecuación vectorial:* $(x,y,z)=(1,1,1)+t\,(1,0,1)+s\,(-1,1,-2)$

2. *Ecuación cartesiana: un vector normal es* $\overrightarrow{N}=\overrightarrow{QP}\times\overrightarrow{RP}=(1,0,1)\times(-1,1,-2)=(-1,1,1)$. *Como* $\overrightarrow{N}\cdot P=1$, *una ecuación cartesiana es*

$$-x+y+z=1$$

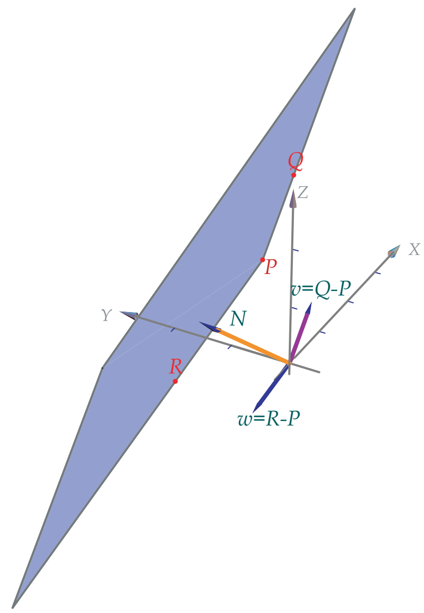

Figura 2.11

2.4 PARALELISMO, PERPENDICULARIDAD Y ÁNGULO

Definición 13

Consideremos la recta $L_1 : \ (x,y,z) = P + t\,\overrightarrow{v}$ *y los dos planos*

$$\Pi_1 : \ a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \quad y \quad \Pi_2 : \ a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

Entonces, siendo $\overrightarrow{N_1} = (a_1, b_1, c_1)$, *y* $\overrightarrow{N_2} = (a_2, b_2, c_2)$, *normales a* Π_1 *y* Π_2, *respectivamente,*

1. $\Pi_1 \parallel \Pi_2$ *si y sólo si* $\overrightarrow{N_1} \parallel \overrightarrow{N_2}$

2. $\Pi_1 \perp \Pi_2$ *si y sólo si* $\overrightarrow{N_1} \perp \overrightarrow{N_2}$

3. *El ángulo entre los planos es el ángulo entre los vectores normales*

4. Ł$_1 \parallel \Pi_1$ *si y sólo si* $\overrightarrow{N_1} \perp \overrightarrow{v}$

5. Ł$_1 \perp \Pi_1$ *si y sólo si* $\overrightarrow{N_1} \parallel \overrightarrow{v}$

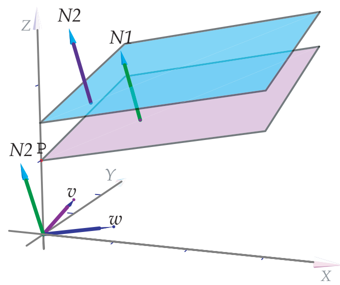

Figura 2.12

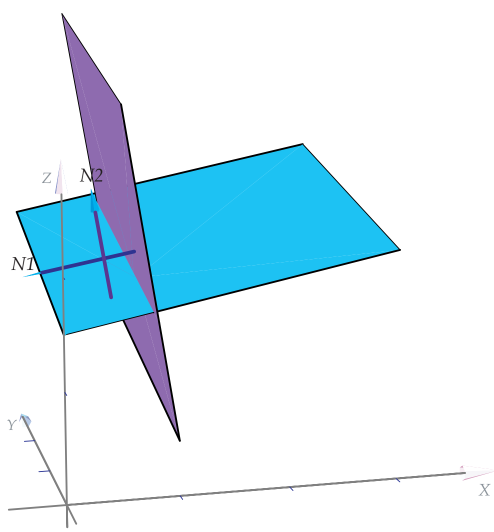

Figura 2.13

Ejemplo 17

Consideremos tres puntos $P = (0,0,-1)$, $Q = (1,2,1)$, $R = (1,4,4)$ *no colineales. Para obtener un punto D tal que los cuatro puntos conformen un paralelogramo, debemos escoger D de la siguiente manera*

$$D = P + (Q-P) + (R-P) = Q + R - P$$

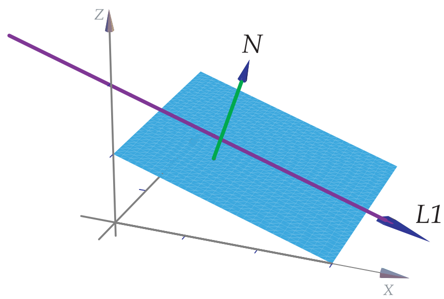

Figura 2.14

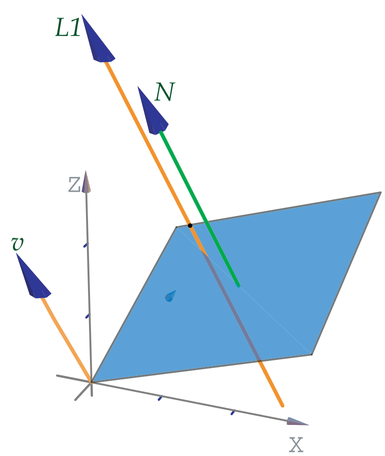

Figura 2.15

Esto es así puesto que D debe estar en el plano que contiene a P, Q, R.

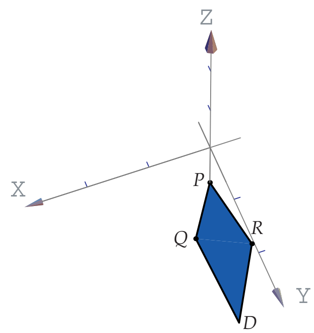

Figura 2.16

Ejemplo 18

Consideremos el problema de obtener la ecuación cartesiana del plano Π_1 que contenga a la recta

$$L_1:\ (x,y,z) = (1,2,1) + t\,(0,2,3)$$

y al punto $P = (0,0,-1)$ (que no está en L_1).

Para encontrar la ecuación cartesiana del plano Π_1, buscamos tres puntos no colineales en este plano; el punto P que ya tenemos y dos puntos de la recta. Para obtener estos dos puntos de la recta, le damos una par de valores al parámetro t tal que nos generen al final tres puntos no colineales, digamos que ponemos $t = 0$ y $t = 1$. Así, tres puntos no colineales en el plano Π son

$$P = (0,0,-1),\ Q = (1,2,1),\ R = (1,4,4)$$

Observe que $\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

Bien, ahora tomemos $\overrightarrow{N} = \overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{RP} = (1,2,2) \times (1,4,5) = (2,-3,2)$. Como $\overrightarrow{N} \cdot P = -2$, una ecuación cartesiana es

$$2x - 3y + 2z = -2$$

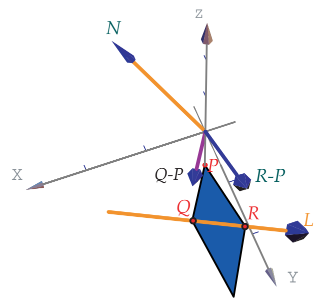

Figura 2.17

■ Ejemplo 19

Consideremos el problema de obtener la ecuación cartesiana del plano Π_1 *que sea paralelo a las rectas*

$$L_1:\ (x,y,z)=(1,2,1)+t\,(0,2,3),\qquad L_2:\ (x,y,z)=(1,0,1)+t\,(5,0,0)$$

y que contenga al punto $P=(1,1,1)$

De acuerdo a la teoría, un vector normal a Π *debe ser perpendicular a* $(0,2,3)$ *y a* $(5,0,0)$*; entonces para encontrar la ecuación cartesiana del plano* Π_1*, podemos tomar* $\overrightarrow{N}=(0,2,3)\times(5,0,0)=(0,15,-10)$*. Como* $\overrightarrow{N}\cdot P=5$*, una ecuación cartesiana es*

$$15y-10z=5$$

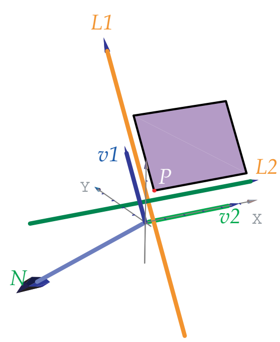

Figura 2.18

■ Ejemplo 20

Consideremos el problema de obtener la ecuación cartesiana del plano Π_1 que sea perpendicular a la recta

$$L_1 : \ (x,y,z) = (1,2,1) + t\,(0,2,3)$$

y que contenga al punto $P = (1,1,1)$

Para encontrar la ecuación cartesiana del plano Π_1, podemos tomar $\overrightarrow{N} = (0,2,3)$. Como $\overrightarrow{N} \cdot P = 5$, una ecuación cartesiana es

$$2y + 3z = 5$$

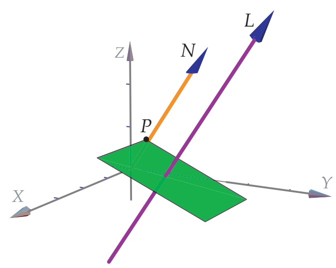

Figura 2.19

2.5 INTERSECCIÓN ENTRE RECTA Y PLANO

Para obtener la intersección entre una recta $L_1 : \ (x,y,z) = P + t\,\overrightarrow{v}$ y el plano $\Pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z = d_1$, lo que hacemos es despejar x, y y z en la ecuación de la recta y sustituimos este despeje en la ecuación del plano. Resolvemos para t, si la solución es única, con este valor de t obtenemos el punto de intersección sustituyendo en la ecuación de la recta.

Observe que la ecuación en t puede también tener infinitas soluciones (si la recta está en el plano) o no tener solución (si no hay intersección).

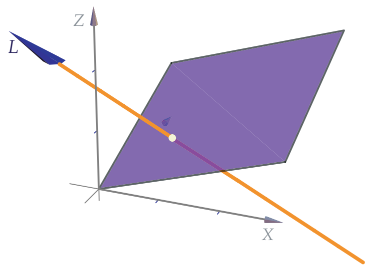

Figura 2.20

■ **Ejemplo 21**

Consideremos el problema de obtener la intersección, si hubiera, entre el plano Π : $x-2y+3z=1$ *y la recta* $L:\ (x,y,z)=(1,2,1)+t\,(0,2,3)$

Las ecuaciones parámetricas de L son

$$\begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ y & = & 2+2t \\ z & = & 1+3t \end{array}$$

Luego, sustituyendo en la ecuación de Π *queda*

$$1-2(2+2t)+3(1+3t)=1 \quad \Longrightarrow \quad t=\frac{1}{5}$$

Finalmente, sustituyendo en la ecuación de L, obtenemos el punto de intersección $(1,\frac{12}{5},\frac{8}{5})$

2.6 DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA Y A UN PLANO.

Podemos usar las ideas geométricas vistas en las secciones anteriores para deducir fórmulas para calcular la distancia de un punto a un plano y la distancia de un punto a una recta.

Esta distancia se calcula como la longitud de la perpendicular del punto al plano o a la recta, por eso no es raro obtener fórmulas usando la proyección ortogonal

1. **Distancia de un punto a un plano**

Consideremos un plano Π, con vector normal $\overrightarrow{N}$, que contiene a un punto P. La distancia $d(Q,\Pi)$ de Q a Π es

$$\begin{aligned} d(Q,\Pi) &= ||Proy_{\overrightarrow{N}}^{\overrightarrow{PQ}}|| \\ &= \frac{\left|(Q-P)\cdot\overrightarrow{N}\right|}{||\overrightarrow{N}||} \end{aligned}$$

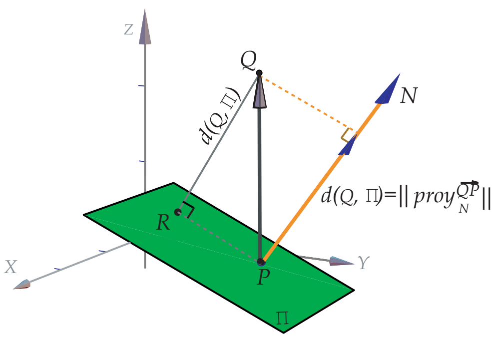

Figura 2.21

2. **Distancia de un punto a una recta**

Consideremos una recta $L:\ (x,y,z) = P + t\,\overrightarrow{v}$, la distancia $d(Q,L)$ de Q a L es

$$d(Q,L) = ||\overrightarrow{PQ} - Proy_{\overrightarrow{v}}^{\overrightarrow{PQ}}||$$

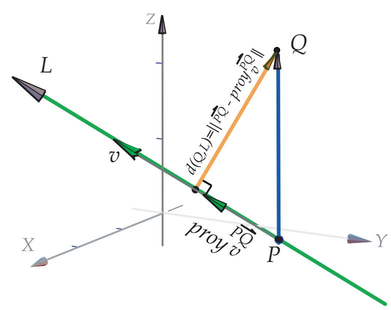

Figura 2.22

REFERENCIAS

[Kunze] Hoffman, K. y Kunze, R “Álgebra Lineal". Ediciones Zacatenco. 1965

[Anton] Anton, H. “Introducción al Álgebra Lineal". Limusa. 1985

[Grossman] Grossman, S. “Álgebra Lineal". Ed. Iberoaméricana.

[Arce] Arce, C. et al “Álgebra Lineal". UCR. 1995.

[Noble] Noble, D. “Algebra Lineal Aplicada". Prentice-Hall. 1990.

[Gull] Gull Sthephen et al. *“The Geometric Algebra of Spacetime".* Found. Phys. 23(9) 1175. (1993)

[González] González, R. “Trataise of Plane Geometry Through Geometric Algebra". http://campus.uab.es/Λpc00018