TALLER N°5 PROBLEMAS SOBRE RECTAS[1] Prof. Bernardo Ospina S.

Solucionado por Alejandro Vargas[2]

8. *Hallar las ecuaciones paramétricas y simétricas de la recta que pasa por el punto (3, -1, -3) y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos (3, -2, 4), (0, 3, 5).*

Solución.

Lo primero que debemos hacer es el mismo ejercicio mental que se han realizado con lo anteriores problemas y es imaginar lo que ocurre.

1. Sabemos ya muy bien que rectas perpendiculares a una sola recta existen muchas, sin embargo con la condición de que tenga que pasar por un punto esto reduce las posibilidades a digamos sólo dos, estás son, una recta con un vector director en un sentido y la otra con un vector director con sentido contrario, claro está, si queremos que la recta solución se cruce con la dada en el problema.

2. No es difícil decir que la ecuación de la recta podría ser $L = (3, -5, -1)t + (0,3,5)$, veamos que es lo que tenemos:

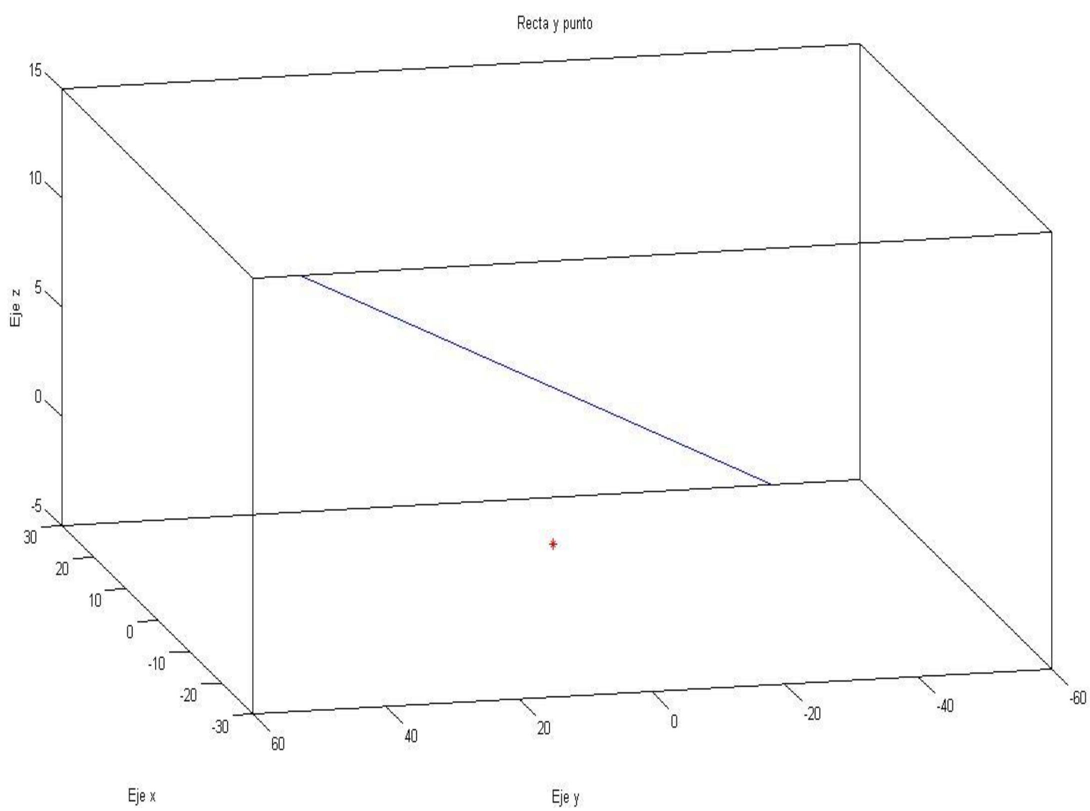

Figura 1. Recta (azul) y punto (rojo).

[1] Programa graficador Matlab
[2] Estudiante de Química industrial, tutor de álgebra lineal, autor del blog "Ciencia y filosofía" blog.utp.edu.co/cienciayfilosofia

Veamos qué pasa si alguien propone una recta solución que no corte a la dada en el problema pero que pase por el punto que nos dieron como:

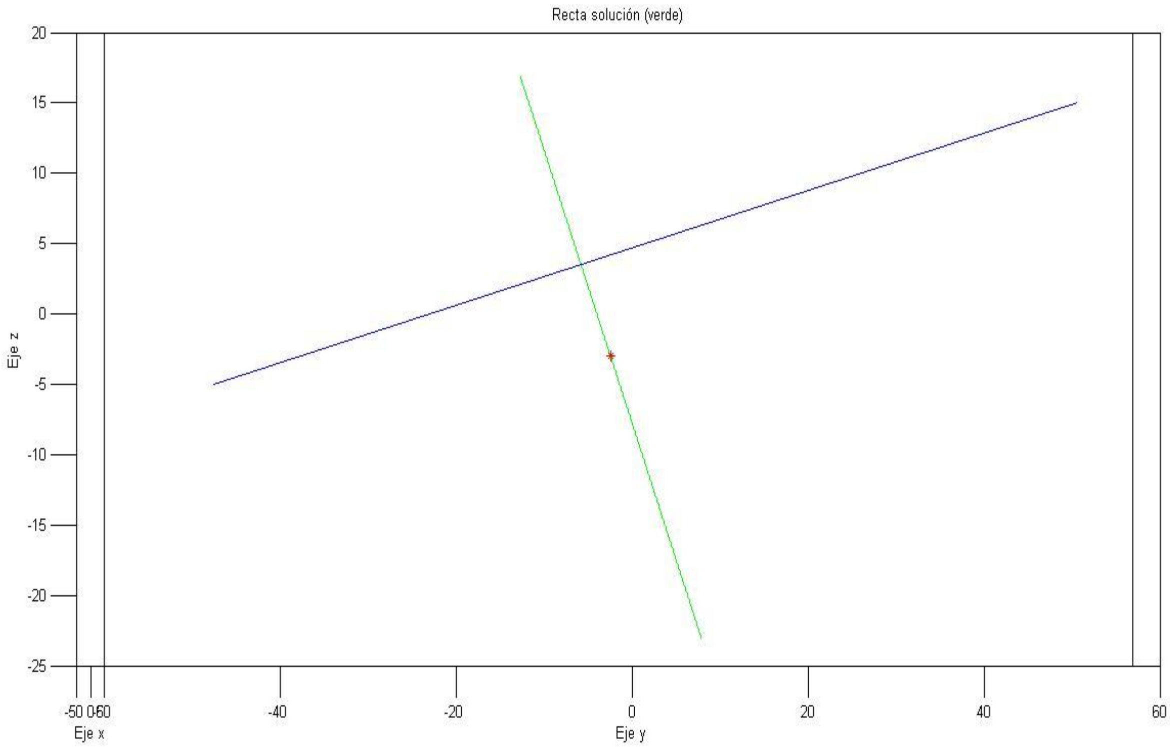

Figura 2. Vista para el plano zy de la posible recta solución (verde).

Ahora girando un poco la figura veremos que no necesariamente se cortan.

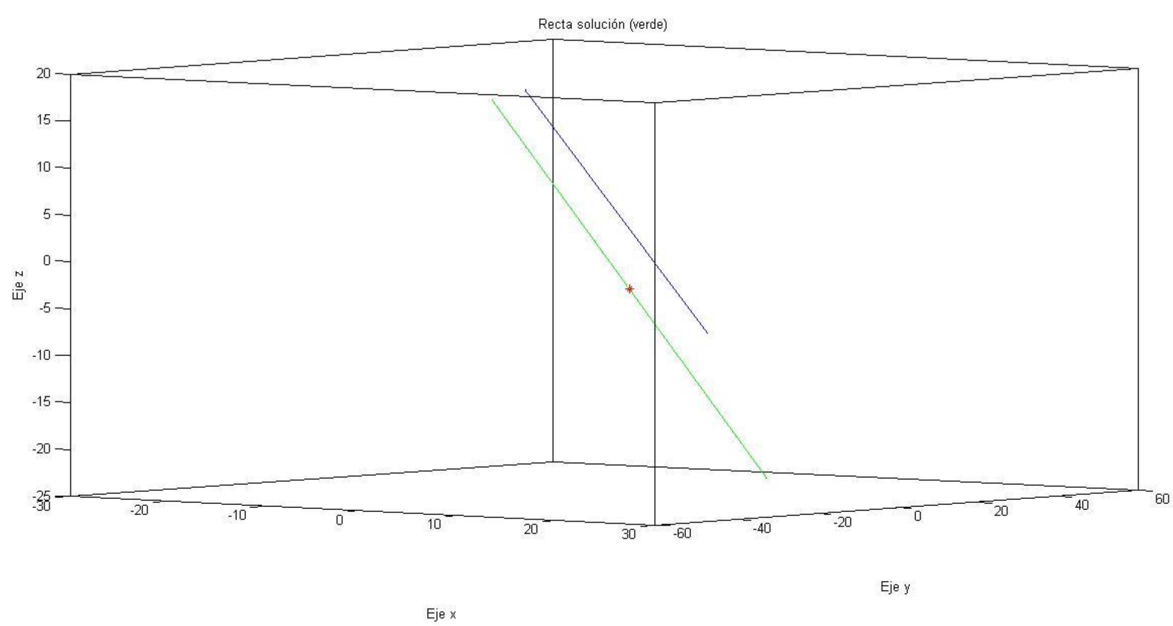

Figura 3. Vista lateral de la posible recta solución.

Y podríamos entonces dibujar más…

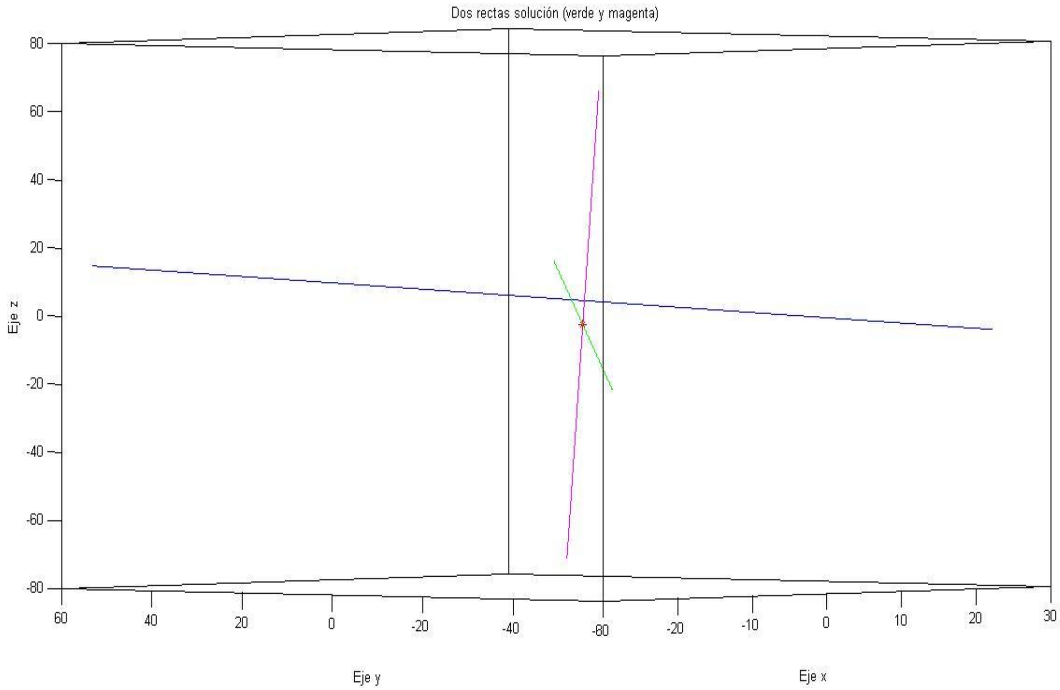

Figura 4. Recta solución (magenta) ortogonal a la del problema.

Se ve que ambas pasan por el punto dado en el problema y que no son ortogonales entre ellas, por lo tanto si buscamos rectas que no se crucen con la dada serán mucha y el cálculo es sencillo:

I. Proponemos un vector director solución $\vec{C}$ que tiene componentes $\vec{C} = (c_1, c_2, c_3)$.

II. Que cumpla con la condición de que sea ortogonal al vector director de la recta dada que llamaremos $\vec{A} = (3, -5, -1)$

$$\therefore\ \vec{C} \cdot \vec{A} = 0$$

$$3c_1 - 5c_2 - c_3 = 0$$

$$c_3 = 3c_1 - 5c_2$$

$$Lo\ cual\ nos\ da\ una\ recta\ L\ que\ pasa\ por\ (3, -1\ , -3)$$

$$L = (c_1, c_2, 3c_1 - 5c_2)t + (3, -1, -3)$$

Nota: Para graficar la recta verde tome $c_1 = c_2 = 1 \rightarrow c_3 = -2$

Para la magenta fue $c_1 = 1;\ c_2 = 2 \rightarrow c_3 = -7$

16. *Calcule la distancia del plano:* $2x + 2y - z = 0$ *al punto* $(2,2, -4)$

El problema no es difícil pero sí me gustaría ver la demostración, ya que he mostrado repetidas veces que ese ejercicio de mirar de donde salen las cosas es un trabajo muy fructífero.

Lo que tenemos es semejante a lo siguiente:

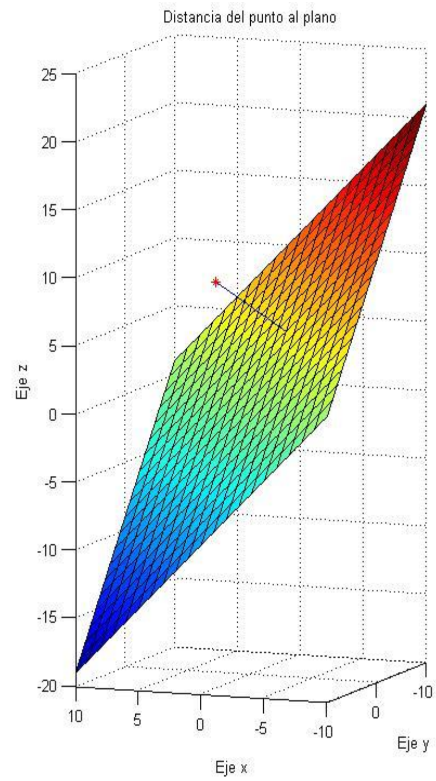

Figura 5. Plano (de colores), punto (rojo) y distancia (azul).

Lo que vamos a hacer es tomar un punto cualquiera sobre el plano y luego buscaremos el vector que une el punto que esta fuera del plano con el que tenemos sobre el plano, así nos queda pues:

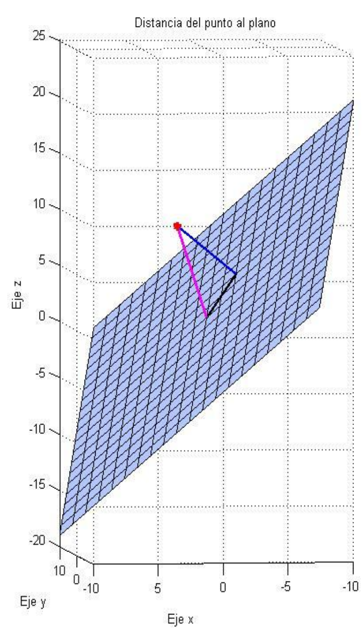

Figura 6. Distancia (azul) del punto al plano (gris), Distancia (magenta) de cualquier punto al punto dado, ayuda visual para completar un triángulo rectángulo (negro).

Es evidente que la tan nombrada distancia (azul) del punto al plano sea la normal del plano, pues la distancia tiene que ser medida ortogonalmente a dicho plano, así pues procedemos a hallar la distancia del punto al plano, lo cual no es más sino calcular ese cateto que se ve en azul, para eso necesitamos la hipotenusa (que es la normal del punto cualquiera al punto dado) y el coseno del alguno entre esta hipotenusa y el cateto en azul que ya dijimos que era la normal del plano.

$$Sea\ P=(x,y,z) un\ punto\ cualquiera\ sobre\ el\ plano, A=(x_0,y_0,z_0)\ el\ punto\ dado\ y\ \vec{n}\ la\ normal$$

$$\therefore\ \overline{PA}\cdot\vec{n}=\|\overline{PA}\|\|\vec{n}\|cos\theta$$

$$\frac{\overline{PA}\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|}=\|\overline{PA}\|cos\theta$$

$$De\ lo\ cual\ ya\ sabemos\ que\ \|\overline{PA}\|cos\theta\ es\ la\ distancia\ del\ punto\ al\ plano, la\ llamaremos\ D$$

$$\frac{\overline{PA}\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|}=D$$

$$\frac{n_1(x_0-x)+n_2(y_0-y)+n_3(z_0-z)}{\sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2}}=D$$

$$\frac{n_1x_0+n_2y_0+n_3z_0-(n_1x+n_2y+n_3z)}{\sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2}}=D$$

Ya sabemos que P es un punto sobre el plano y que el “producto punto” entre la normal del plano y un punto sobre él es igual a un número que llamamos d, así las cosas:

$$\frac{n_1x_0+n_2y_0+n_3z_0-d}{\sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2}}=D$$

Este resultado es importante pues muestra el poder que tiene el álgebra lineal para facilitar los cálculos que por otro tipo de análisis es tedioso (¡inténtelo!), y el problema que teníamos al iniciar es sumamente fácil.

Solución:

$$\frac{2*2+2*2+4}{\sqrt{9}}=4\ unidades$$

TALLER N°6 PROBLEMAS DE RECTAS **Prof. Bernardo Ospina S.**

Solución por Alejandro Vargas

2. Encuentre la ecuación del plano que pasa por el punto $(2{,}4, -1)$ y contiene a la recta de intersección de los planos $x - y - 4z = 2$ y $-2x + y - 2z = 3$.

Lo importante de este problema es su interpretación geométrica, pues con esta es que se logra resolver, así pues veamos qué es lo que tenemos.

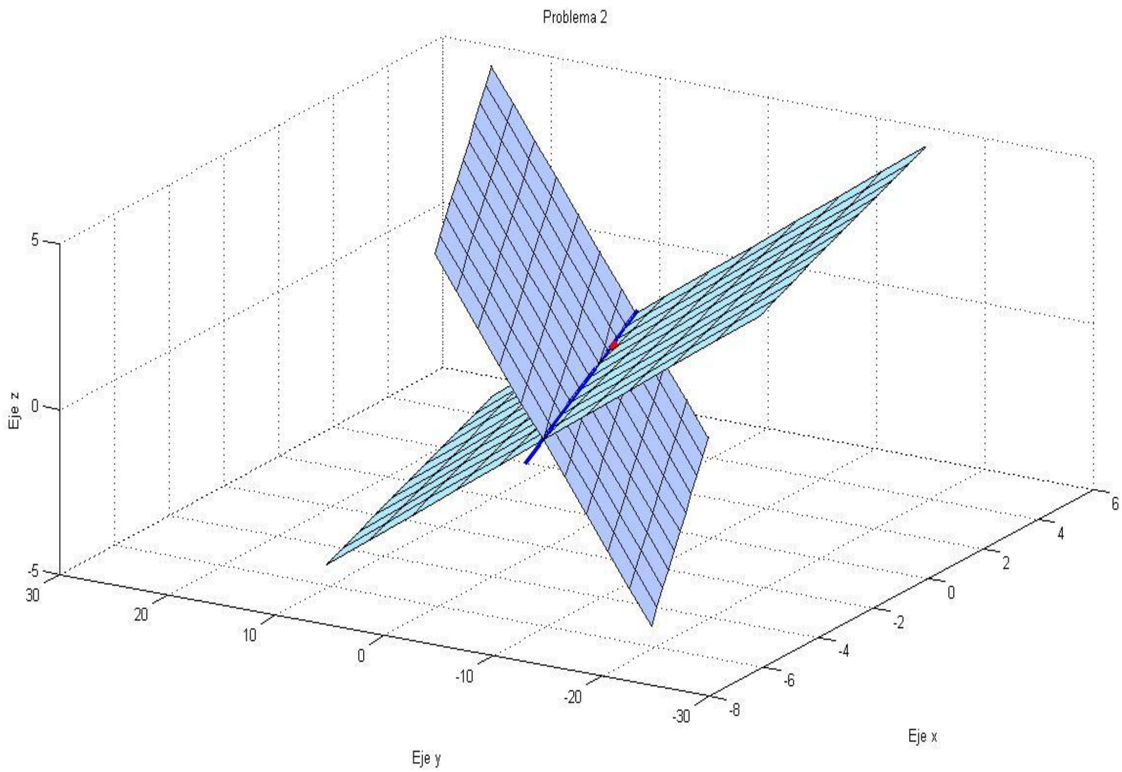

Figura 7. Planos, recta intersección (azul) y punto (rojo).

Bien, lo queremos es encontrar un plano que tenga esta recta y el punto dado, para ello utilizaremos la definición de plano, sabemos que toda recta contenida en el plano es ortogonal a la normal del plano, para encontrar esa normal sin equivocarnos necesitamos dos rectas no paralelas dentro del plano, realizar su producto cruz y así tener las componentes de la normal del plano solución.

Para conseguir otra recta dentro del plano sólo que tenemos que encontrar el vector que une el punto dado con cualquier punto sobre la recta intersección y luego realizar el producto cruz para determinar la normal, así tenemos que:

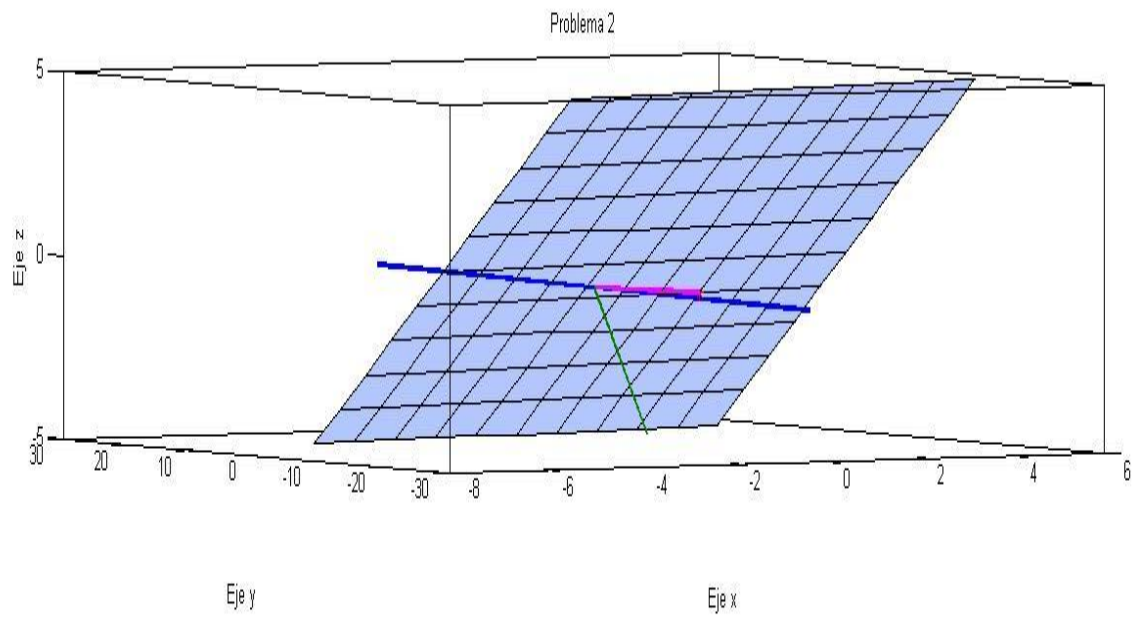

Figura 8. Recta intersección (azul), recta que une un punto cualquiera sobre la recta intersección con el punto dado (magenta) y vector resultante del producto cruz de ellos.

Podemos ver que efectivamente ese vector resultante es la normal del plano solución el resto no es más sino un procedimiento matemático.

$$L_i \text{ es la recta intersección}$$

$$L_i = t(6,10,-1) + B$$

Para hallar B necesitamos un punto que compartan los dos planos, como vemos en la figura 7 son muchos los puntos que cumplen está condición, pero sólo necesitamos uno, así que diremos que en las ecuaciones cartesianas $y = 0$ y esto convierte las ecuaciones de los planos en un sistema $2x2$.

$$x - 4z = 2$$

$$-2x - 2z = 3$$

$$x = -\frac{4}{5}$$

$$z = -\frac{7}{10}$$

Por lo tanto nuestra recta intersección será:

$$L_i = t(6,10,-1) + \left(-\frac{4}{5}, 0, -\frac{7}{10}\right)$$

El vector que une el punto dado (P) y un punto (P_L) sobre la recta cuando $t = 0$ es:

$$\overline{PP_L} = \left(\frac{14}{5}, 4, -\frac{3}{10}\right)$$

El producto cruz entre este y el vector director de la recta intersección es:

$$\overline{PP_L} \times \vec{D} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 6 & 10 & -1 \\ \frac{14}{5} & 4 & -\frac{3}{10} \end{vmatrix} = \hat{\imath} - \hat{\jmath} - 4\hat{k}$$

Lo cual quiere decir mínimo es paralelo al primer plano que nos dieron en el problema, por ahora tenemos que:

$$x - y - 4z = ?$$

Sólo es evaluar está expresión en $(2,4,-1)$ y tendremos a d, lo cual nos da:

$$x - y - 4z = 2$$

¡Menuda sorpresa es exactamente el primer plano que nos dieron! Si hubiéramos sido más observadores tanto en el enunciado del problema como en la grafica 7 nos daríamos cuenta de que la única recta que puede contener el punto dado y la recta intersección era este plano.

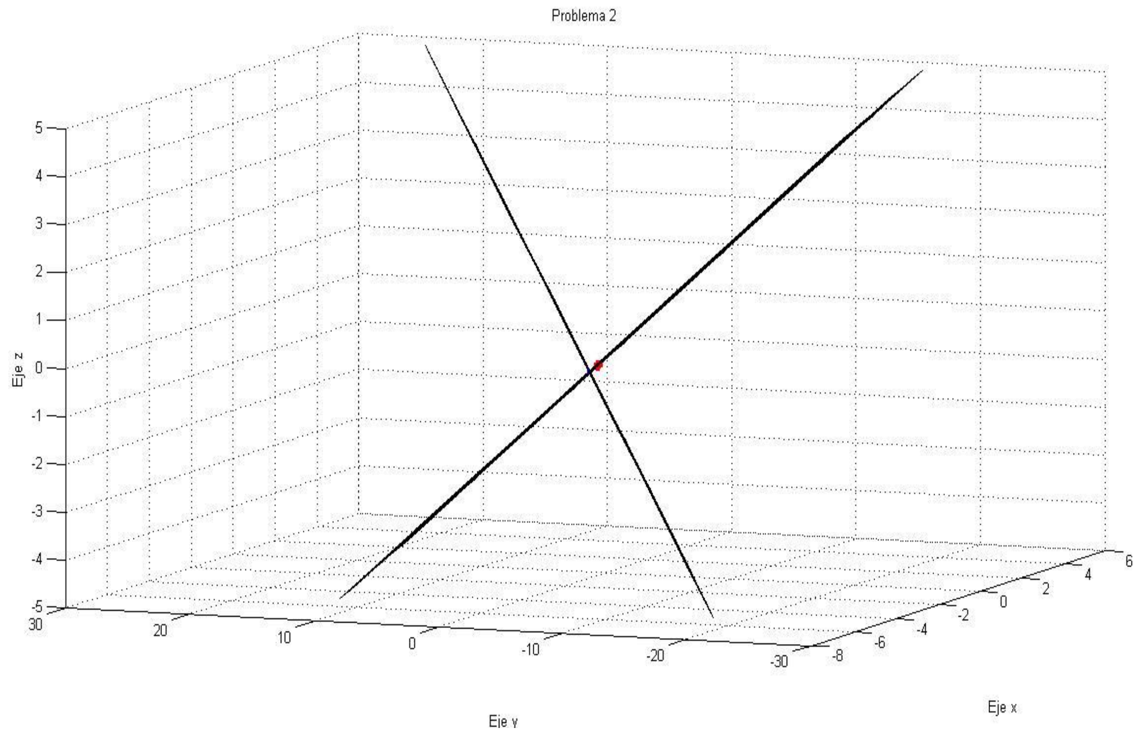

Figura 9. Vista desde una perspectiva más ortogonal a ambos planos donde se ve que el punto dado está sobre uno de ellos.