4 de Mayo de 2012

Solución: Taller (1) sobre representación de señales

1. Determinar si cada una de las siguientes señales es periódica o no. Si la señal es periódica, determine su periodo fundamental T_0.

a. $x(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}t + \frac{\pi}{4}\right) = A_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$

$$\Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{3} \quad ; \quad \boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{3}} = 3s} \checkmark$$

b. $x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}n\right)$

$$\Omega_1 = \frac{\pi}{3} \quad ; \quad T_1 = \frac{2\pi}{\pi/3} = 6$$

$$\Omega_2 = \frac{\pi}{4} \quad ; \quad T_2 = \frac{2\pi}{\pi/4} = 8$$

$$\Rightarrow \frac{\Omega_1}{\Omega_2} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \rightarrow$$ como es un número racional, la señal $x[n]$ sí es periódica

$$\boxed{T_0 = 4T_1 = 3T_2} \rightarrow T_0 = 24s \checkmark$$

c. $x(t) = \cos t + \text{sen}\sqrt{2}t$

$$\omega_1 = 1 \quad ; \quad T_1 = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$$

$$\omega_2 = \sqrt{2} \quad ; \quad T_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi}{2\pi/\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$ como es un número irracional, la señal $x(t)$ no es una señal periódica

d. $x[n] = e^{j(5\pi/6k)n} = A_m e^{j\Omega_0 n}$

$$\Rightarrow \Omega_0 = \frac{5\pi}{6k} \Rightarrow \boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0} = \frac{2\pi}{5\pi/6k} = \frac{12k}{5}s} \checkmark$$

e. $x(t) = \text{sen}t + \text{sen}t/3 + \text{sen}t/5$

$$\omega_1 = 1 \qquad \omega_2 = 1/3 \qquad \omega_3 = 1/5$$

$$T_1 = 2\pi s \qquad T_2 = 6\pi s \qquad T_3 = 10\pi s$$

de acuerdo a lo anterior, necesitamos un mínimo común múltiplo que nos describa al periodo fundamental, obteniendo así que:

$$\boxed{T_0 = 15T_1 = 5T_2 = 3T_3 = 30\pi s} \checkmark$$

2. Exprese los valores de Ω_1 y Ω_2 para que la señal $x[n]$ sea una señal periódica

$$x[n] = \cos(\Omega_1 n) + \cos(\Omega_2 n)$$

Solución Para que la señal en tiempo discreto $x[n]$ sea una señal periódica, se debe cumplir que la división de cada periodo de las señales por un valor T_0 (periodo fundamental) sea un número racional.

3. Demuestre que si $x(t+T) = x(t)$, entonces:

$$\int_{\alpha}^{\beta} x(t)dt = \int_{\alpha+T}^{\beta+T} x(t)dt$$

Solución Teniendo una señal periódica $x(t)$, se cumple que: $x(t+T) = x(t)$ ✓

Realizando un cambio de variable $\lambda = t+T$, se tiene que: $t = \lambda - T$; $dt = d\lambda$

$$x(\lambda) = x(\lambda - T) = x(t) \checkmark$$

por lo tanto: $x \rightarrow \alpha$; $\lambda \rightarrow \alpha+T$

$x \rightarrow \beta$; $\lambda \rightarrow \beta+T$

reemplazando esta información en la integral, se tiene que:

$$\int_{\alpha}^{\beta} x(t)dt = \int_{\alpha+T}^{\beta+T} x(\lambda)d\lambda$$

donde la información de t y λ.

4. Sean dos señales ortogonales $x(t)$ y $y(t)$ definidas en el intervalo $[t_1, t_2]$, y además, $z(t) = x(t) + y(t)$ en el mismo intervalo de tiempo. Demuestre que:

$$E_z = E_x + E_y.$$

solución Partiendo del hecho que

$$z(t) = x(t) + y(t) \quad \forall\ t \in [t_1, t_2]$$

podemos decir que:

$$z^2(t) = [x(t)+y(t)]^2 = x^2(t) + 2x(t)y(t) + y^2(t)$$

e integrando en ambos lados para calcular la energía de z (E_z), se tiene que:

$$\int_{t_1}^{t_2} z^2(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2}[x^2(t)+2x(t)y(t)+y^2(t)]\,dt$$

$$\int_{t_1}^{t_2} z^2(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\,dt + 2\int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t)\,dt + \int_{t_1}^{t_2} y^2(t)\,dt$$

Donde $E_z = \int_{t_1}^{t_2} z^2(t)\,dt$

$E_x = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\,dt$; $E_y = \int_{t_1}^{t_2} y^2(t)\,dt$

y además: $\int x(t)y(t)\,dt = 0$ debido al concepto de ortogonalidad, se tiene que:

$$\boxed{E_z = E_x + E_y}$$ ✓

5. Determine la constante **A** para que las señales $\varphi_1(t)$ y $\varphi_2(t)$ sean ortogonales en el intervalo $(-\infty, \infty)$

$\varphi_1(t) = e^{-|t|}$; $\varphi_2(t) = 1 - Ae^{-2|t|}$

solución para que ambas señales sean mutuamente ortogonales, se dice que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(t)\varphi_2(t)\,dt = 0$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{0} e^{t}(1-Ae^{2t})\,dt + \int_{0}^{\infty} e^{-t}(1-Ae^{-2t})\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} (e^{t} - Ae^{3t})\,dt + \int_{0}^{\infty} (e^{-t} - Ae^{-3t})\,dt$$

$$= \lim_{s\to-\infty} \int_{s}^{0} (e^{t} - Ae^{3t})\,dt + \lim_{u\to\infty} \int_{0}^{u} (e^{-t} - Ae^{-3t})\,dt$$

$$= \lim_{s\to-\infty}\left(1 - \frac{A}{3} - e^{s} + \frac{Ae^{3s}}{3}\right) - \lim_{u\to\infty}\left(e^{-u} - \frac{Ae^{-3u}}{3} - 1 + \frac{A}{3}\right)$$

teniendo en cuenta el comportamiento de la función exponencial, se tiene que

$$x \to -\infty \ , \ e^{x} \to 0$$

por lo tanto:

$$= 1 - \frac{A}{3} + 1 - \frac{A}{3} = 0 \Rightarrow \boxed{A = 3}$$ ✓

6. Sea una función $g(t)$ dada como:

$$g(t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(t)$$

Demostrar el teorema de Parseval para señales de energía.

$$E_g = \sum_{i=1}^{\infty} c_i E_{\varphi i}$$

solución partiendo desde el hecho que

$g(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(t)$ se calcula la energía para la señal $g(t)$:

$$\int g^2(t)\,dt = \int \left(\sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(t)\right)^2 dt$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(t)\right)^2 = (c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \dots + c_n\varphi_n(t)) \cdot (c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \dots + c_n\varphi_n(t))$$

teniendo en cuenta el concepto de ortogonalidad se tiene que

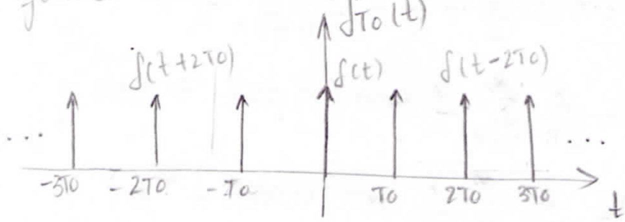
$$\left(\sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(t)\right) = c_1^2\varphi_1^2(t) + c_2^2\varphi_2^2(t) + \dots + c_n^2\varphi_n^2(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \varphi_i^2(t)$$

por lo tanto, haciendo tender $n \to \infty$, se tiene que

$$E_g = \int \left(\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 \varphi^2(t)\right) dt = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \int \varphi^2(t)\,dt$$

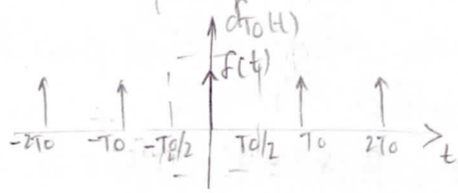
$$\boxed{E_g = \sum_{i=1}^{\infty} c_i E_{\varphi i}}$$ ✓

7. Determine la representación en serie trigonométrica de Fourier para la señal que se ilustra



$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0) \; ; \; k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

solución como es una seña periódica con periodo T_0, se puede calcular la representación de Fourier para un solo periodo y el resto de la señal automáticamente quedará representada



- $a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t)\,dt = \frac{1}{T_0}$

- $a_n = \frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos n\omega_0 t\, \delta(t)\,dt$

  $a_n = \frac{2}{T_0}\cos(0) = \frac{2}{T_0}$

- $b_n = \frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \operatorname{sen} n\omega_0 t\, \delta(t)\,dt$

  $b_n = \frac{2}{T_0}\operatorname{sen}(0) = 0$

por lo tanto:

$$\boxed{f(t) = \delta_{T_0}(t) = \frac{1}{T_0} + \frac{2}{T_0}\sum_{n=1}^{\infty} \cos n\omega_0 t} \checkmark$$

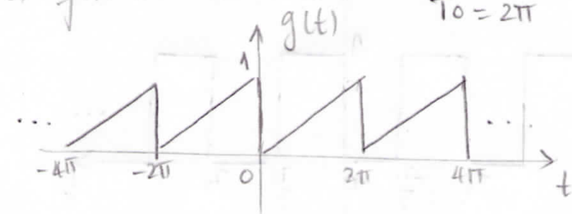
donde $\cdot\; F_0 = a_0 = \frac{1}{T_0}$

$\cdot\; a_n = 2\,\mathrm{Re}\{F_n\} \Rightarrow \frac{a_n}{2} = \mathrm{Re}\{F_n\} = \frac{1}{T_0}$

$\cdot\; b_n = -2\,\mathrm{Im}\{F_n\} = 0$

$F_n = \mathrm{Re}\{F_n\} + j\,\mathrm{Im}\{F_n\} = \frac{1}{T_0}$ ✓

8. Determine la representación en serie exponencial de Fourier para la señal $g(t)$ que se ilustra.



solución como $g(t)$ es una señal periódica, podemos plantear la representación exponencial de Fourier para un solo periodo y la señal $g(t)$ queda representada para todo valor de t.

$$F_n = \frac{1}{T_0}\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\,dt \; ; \; \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

donde: $T_0 = 2\pi$; $f(t) = \frac{1}{2\pi}t$; $\omega_0 = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$

$$\Rightarrow F_n = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t e^{-jnt}\,dt\right)$$

integrando por partes, se tiene que:

$u = t \qquad dv = e^{-jnt}\,dt$

$du = dt \qquad v = \frac{e^{-jnt}}{-jn}$

$$\Rightarrow F_n = \frac{1}{(2\pi)^2}\left[\frac{jt\,e^{-jnt}}{n}\Big|_0^{2\pi} - \frac{j}{n}\int_0^{2\pi} e^{-jnt}\,dt\right]$$

$$F_n = \frac{1}{(2\pi)^2}\left[\frac{j2\pi}{n}\left(e^{-j2\pi n}\right) + 0 - \frac{j}{n}\left(\frac{1}{jn}\right)e^{-jnt}\Big|_0^{2\pi}\right]$$

$$F_n = \frac{1}{(2\pi)^{\cancel{2}}}\left[\frac{j\cancel{2\pi}}{n}\left(e^{-j2\pi n}\right) + \frac{1}{n^2}\left(e^{-j2n\pi} - 1\right)\right]$$

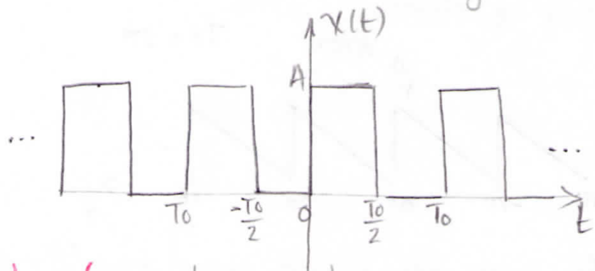
$$\Rightarrow e^{-j2\pi n} = \overset{1}{\cos 2\pi n} - j\,\overset{0}{\operatorname{sen} 2\pi n} = 1$$

$$\boxed{F_n = \frac{j}{2n\pi}} \; ; \; F_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} t\,dt$$

$$F_0 = \frac{1}{(2\pi)^2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{2\pi^2}{4\pi^2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{g(t) = \frac{1}{2} + \frac{j}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n} e^{jnt}} \checkmark$$

9. Considere la señal periódica cuadrada $x(t)$ como se ilustra en la figura.



solución a. Determine la serie exponencial compleja de Fourier.

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{-jn\omega_0 t}; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$\Rightarrow F_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\,dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} A\,dt$$

$$F_0 = \frac{A}{T_0}\left[\frac{T_0}{2} - 0\right] = \frac{A}{2} \checkmark$$

$$F_n = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} A e^{-jn\omega_0 t}\,dt$$

$$F_n = \frac{A}{T_0}\left(\frac{e^{-jn\omega_0 t}}{-jn\omega_0}\right)_0^{T_0/2} = \frac{jA}{2n\pi}\left(e^{-jn\pi} - 1\right)$$

donde $e^{-jn\pi} = \cos(n\pi) - j\,\overset{0}{\text{sen}(n\pi)} = (-1)^n$

$$\Rightarrow F_n = \frac{jA}{2\pi n}\left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ \frac{A}{j\pi}, & n \text{ impar} \end{cases}$$

obteniendo:

$$\boxed{x(t) = \frac{A}{2} + \frac{A}{j\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2m+1} e^{j(2m+1)\omega_0 t}} \checkmark$$

b. Calculando los coeficientes de la serie trigonométrica de Fourier, se tiene que:

$$a_0 = F_0 = \frac{A}{2}; \quad a_n = 2\,\text{Re}\{F_n\} = 0 \checkmark$$

$$b_n = 2\,\text{Im}\{F_n\} = \frac{A}{2\pi n}\left((-1)^n - 1\right); \checkmark$$

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \,\text{sen}\, n\omega_0 t\right)$$

$$\boxed{f(t) = \frac{A}{2} + \frac{A}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\,\text{sen}\, n\omega_0 t}$$

c. $y(t) = x(t) - \frac{A}{2} = \frac{A}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,\text{sen}\, n\omega_0 t$

b. $y(t) = x\left(t + \frac{T_0}{4}\right) - \frac{A}{2} = \frac{A}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,\text{sen}\left(n\omega_0\left(t + \frac{T_0}{4}\right)\right)$

$$y(t) = \frac{A}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,\text{sen}\left(n\omega_0 t + n\overset{\frac{2\pi}{T_0}}{\omega_0}\frac{T_0}{4}\right)$$

$$y(t) = \frac{A}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,\text{sen}\left(n\omega_0 t + \pi/2\right)$$

$$\boxed{y(t) = \frac{A}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos(n\omega_0 t)} \checkmark$$

11. Un grupo de polinomios de Legendre $P_n(x)$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ forman un espacio completo de funciones ortogonales en el intervalo $(-1, 1)$

solución

a. Verifique la ortogonalidad para los tres (3) primeros términos:

$$P_1(t) = 1; \quad P_2(t) = t; \quad P_3(t) = \frac{3t^2}{2} - \frac{1}{2}$$

- $\int_{-1}^{1} P_1(t)P_2(t)\,dt = \int_{-1}^{1} t\,dt = \frac{1}{2}(1 - 1) = 0$
- $\int_{-1}^{1} P_1(t)P_3(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(3t^2 - 1)\,dt = \frac{1}{2}\left[\cancel{1} - \cancel{1} + 1 - 1\right] = 0$
- $\int_{-1}^{1} P_2(t)P_3(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(3t^3 - t)\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{4} - \frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right] = 0$

b. Represente la señal $f(t) = -|t|$ en el intervalo $(-1, 1)$ usando el conjunto anterior:

$$E_{P_1} = 2; \quad E_{P_2} = \frac{2}{3}; \quad E_{P_3} = \frac{2}{5}$$

$$C_1 = 1/2; \quad C_2 = 0; \quad C_3 = 5/8$$

$$\Rightarrow f(t) = C_1P_1(t) + C_2P_2(t) + C_3P_3(t)$$

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2} + \frac{5}{16}\left(3t^2 - 1\right)}$$

c. Calcular el error de la representación de la señal. $\boxed{E_e = E_f - \sum_{i=1}^{3} C_i^2 P_i(t)}$ Teorema de parseval.

$$E_e = \underbrace{\frac{2}{3}}_{E_f} - \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2 + (0)^2 \cdot \frac{2}{3} + \left(\frac{5}{8}\right)^2 \cdot \frac{2}{5}\right] = \frac{1}{96} \checkmark$$