

Fundamentos para la Representación y Análisis de Señales Mediante Series de Fourier

Andrés Felipe López Lopera*

Resumen. Existe una gran similitud entre vectores y las señales. Propiedades tales como la ortogonalidad que permite descomponerlos a través de otros tipos de vectores, o en señales en su defecto, permitiendo así una representación con un nivel de error que dependerá de la manera como realicemos la representación; encontrando una gran variedad de conjuntos de funciones que permiten representar señales particulares facilitando el análisis de esta bajo el concepto de ortogonalidad del conjunto de funciones seleccionado $\varphi(t)$.

Las series de Fourier, tales como la serie exponencial de Fourier y la serie trigonométrica de Fourier, son casos particulares de conjuntos de funciones ortogonales que permiten la representación de la señal original a través de un conjunto de familia de funciones características en forma exponencial compleja (para representar cualquier tipo de funciones), o en un caso más particular, en forma trigonométrica (para representar funciones de carácter estrictamente reales). También se encuentran propiedades de la señal de análisis $f(t)$ que reducen el procedimiento matemático necesario para las diferentes representaciones de Fourier.

Palabras Claves. Señales, representación de señales, conjunto de familias comunes, funciones características, ortogonalidad.

1. INTRODUCCIÓN. La necesidad de representar señales en conjuntos de familias comunes de funciones características ha sido un tema de total interés e importancia para el procesamiento y análisis de fenómenos físicos, tanto de carácter determinísticos como de carácter probabilístico, con los que diariamente convivimos. Este tipo de

*Estudiante de Ingeniería Eléctrica, Universidad Tecnológica de Pereira, UTP (anfeloper@utp.edu.co)

Este documento estará basado en una serie de notas e ideas recopiladas por el ingeniero electrónico de la Universidad Nacional de Colombia, 2004; y PhD en Computer Science (Ciencias de la Computación), Universidad de Manchester, Julio de 2011; Mauricio A. Álvarez, actual profesor en el departamento de Ingeniería Eléctrica de la Universidad Tecnológica de Pereira (UTP). También se tendrán referencias de los documentos y libros estudiados que puedan complementar la información que se presenten en este documento.

representaciones se realizan para una mejor interpretación de estos fenómenos si se elige correctamente el conjunto de funciones que faciliten el análisis de la señal original.

1.1. JEAN-BAPTISTE JOSEPH FOURIER. (1768-1830). Matemático y físico francés. Nació el 21 de Marzo de 1768 en Auxerre, capital del departamento de Yonne, en la región de Borgoña, al sureste de París. Jean Baptiste Joseph Fourier más conocido como Joseph Fourier realizó trabajos sobre la descomposición o representación de funciones periódicas en series trigonométricas convergentes llamadas *SERIES DE FOURIER*, método por el cual consiguió resolver la ecuación de calor.



Figura 1.1.1. Jean-Baptiste Joseph Fourier



Figura 1.1.2. Localización Auxerre y París

Estudió con los benedictinos, orden religiosa de San Benito, en la Escuela Superior de Auxerre, pero que abandonó más tarde para dedicarse al estudio de las ciencias. Participó en la revolución francesa. Ingresó a la Escuela Normal Superior de París en donde tuvo entre sus profesores a Joseph-Louis Lagrange y Pierre Simon Laplace, los cuales, luego debatirían debido a la simplificación excesiva que proponía las series trigonométricas establecidas por Fourier. En 1830, el día 16 de Mayo, Joseph Fourier muere asfixiado en París, capital de Francia, por poner la combustión de su calefacción demasiado fuerte ya que él era muy friolero según contaba un profesor de matemáticas.

1.2. CONTENIDO. En la sección 2 se establecerá una analogía entre vectores y señales, describiendo paso a paso la representación o descomposición de un vector en términos de un conjunto de vectores característicos que nos brinde el menor error posible para establecer así las bases y conceptos fundamentales que nos permita realizar un claro análisis en la representación de señales. En la sección 3 y 4, se establecerá la serie exponencial de Fourier y la serie trigonométrica de Fourier como el conjunto de familia común que representará nuestra señal original. En la sección 4, también se realizará las relaciones pertinentes para calcular los coeficientes de Fourier de la serie exponencial a través de los coeficientes de Fourier de la serie trigonométrica y viceversa siempre y

cuando sea posible la transformación. En la sección 5, se analizarán algunos casos particulares de paridad y periodicidad de la señal de análisis $f(t)$. Y finalmente, en la sección 6, se realizará una recopilación de las expresiones más importantes de este documento para la representación de señales a través de las series de Fourier.

2. REPRESENTACIÓN DE SEÑALES. Para establecer una representación de una señal en particular, se realizará inicialmente un análisis adecuado de un conjunto de vectores de un espacio vectorial para una interpretación mucho más fácil de la idea de la representación de una señal.

2.1. VECTOR. [1] Un vector es aquel que se especifica mediante su magnitud, dirección y sentido. Los vectores se denotarán, en este documento, con negrita y sus magnitudes como cursiva para una mejor interpretación de estos. También se sabe que un vector V_1 se puede representar de formas diferentes logrando así infinitas representaciones de un vector como se observa en la figura 2.1.

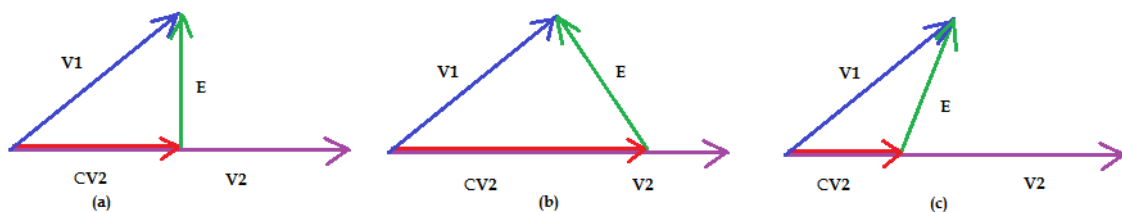


Figura 2.1.1: Representación de vectores

De acuerdo a la figura anterior, tenemos que el vector V_1 (vector a representar), se puede representar, para cualquiera de los tres casos: (a), (b) y (c), a través de un vector definido como la componente del vector V_1 sobre el vector V_2 (vector de referencia) denotado como $C_{12}V_2$, siendo C_{12} un factor de escalamiento que proyecta a el vector V_1 sobre el vector V_2 , y un vector E al cual denotaremos vector de error, obteniendo así:

$$V_1 = C_{12} V_2 + E \quad (2.1.1)$$

También se puede observar que se obtiene el mínimo vector error siempre y cuando el vector E sea perpendicular al vector $C_{12}V_2$ (vectores ortogonales), demostrando así la independencia entre estos vectores. Para determinar que dos vectores son ortogonales, se utiliza el producto escalar (producto punto) entre dos vectores por facilidad de análisis:

$$A \cdot B = AB \cos \theta; \quad \theta: \text{Ángulo formado entre el vector } A \text{ y el vector } B.$$

De la expresión anterior, podemos aplicar el producto escalar entre dos vectores iguales:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} &= AA \cos 0 \\ A^2 &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

Obteniendo así que el producto escalar entre dos vectores de igual magnitud está dado como el cuadrado de la magnitud del vector.

Ahora bien, si lo que se quiere es calcular el vector de error \mathbf{E} teniendo ya los vectores \mathbf{V}_1 y \mathbf{V}_2 , tenemos que:

$$\mathbf{E} = \mathbf{V}_1 - C_{12} \mathbf{V}_2 \quad (2.1.3)$$

Además, si la magnitud del vector de error tiende a ser muy pequeña ($E \rightarrow 0$) para así obtener una representación completa del vector \mathbf{V}_1 , tenemos que:

$$\mathbf{V}_1 \cong C_{12} \mathbf{V}_2 \quad (2.1.4)$$

Aplicando la definición del producto escalar entre los vectores \mathbf{V}_1 y \mathbf{V}_2 , que forman un ángulo entre sí θ , tenemos que:

$$\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2 = V_1 V_2 \cos \theta \quad (2.1.5)$$

Donde, a su vez, el vector error \mathbf{E} es perpendicular al vector de referencia \mathbf{V}_2 , permitiéndonos aplicar la siguiente relación trigonométrica:

$$\cos \theta = \frac{C_{12} V_2}{V_1} \quad (2.1.6)$$

Remplazando la ecuación 2.1.6 en 2.1.5 y teniendo en cuenta la expresión 2.1.2, obtenemos una expresión para calcular la constante C_{12} :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2 &= C_{12} V_2^2 \\ C_{12} &= \frac{V_1 \cdot V_2}{V_2 \cdot V_2} \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

Esta expresión, será la expresión que nos permitirá plantear un puente entre la representación de vectores y la representación de señales que se mostrará más adelante en la sección 2.2.

2.2. SEÑALES. [1] Una señal puede ser una función de solo una variable de entrada (univariable), cuya variable independiente es el tiempo, $f(t)$, o puede ser una función de más de una variable de entrada (multivariable), como la de una imagen, $f(x, t)$, o la de un video, $f(x, y, t)$, que dependen de variables como el tiempo y un vector posición de la señal. En este documento se estudiarán únicamente aquellas señales univaluadas en el tiempo.

Ahora bien, para representar una señal en particular $f(t)$, podemos representarla de igual manera como se hizo en la representación de vectores mediante una señal de referencia $\varphi(t)$ y una señal de error $f_e(t)$ en un intervalo de tiempo definido $[t_1, t_2]$:

$$f(t) = C\varphi(t) + f_e(t), \quad [t_1, t_2] \quad (2.2.1)$$

Por lo tanto:

$$f_e(t) = f(t) - C\varphi(t) \quad (2.2.2)$$

Y si hacemos tender la señal de error a cero ($f_e(t) \rightarrow 0$) para así obtener una representación completa de la señal $f(t)$, tenemos que:

$$f_1(t) \cong C\varphi(t) \quad (2.2.3)$$

Para calcular la constante C para un mínimo error, procedemos a comparar las energías de las señales a analizar porque estas son las que verdaderamente traen la información del tamaño asociada a una señal. La energía de una señal se define como el cuadrado del área bajo la curva de la señal de análisis si es real o el cuadrado del valor absoluto del área bajo la curva de la señal de análisis si es compleja:

$$E_X = \int_{-\infty}^{\infty} X^2(t) dt \quad \forall X(t) \in \mathbb{R}$$

$$E_X = \int_{-\infty}^{\infty} |X(t)|^2 dt \quad \forall X(t) \in \mathbb{C}$$

De acuerdo a lo anterior podemos definir la energía de la función error $f_e(t)$ para un intervalo de tiempo definido $[t_1, t_2]$, y además, definir un valor de C para el cual la energía de la función de error sea mínima a través del concepto de optimización ($\frac{dE_e}{dC} = 0$):

$$E_e = \int_{t_1}^{t_2} f_e^2(t) dt; \quad E_f = \int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt; \quad E_\varphi = \int_{t_1}^{t_2} \varphi^2(t) dt$$

De la ecuación 2.2.2, tenemos que:

$$E_e = \int_{t_1}^{t_2} f_e^2(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} (f(t) - C\varphi(t))^2 dt$$

$$E_e = \int_{t_1}^{t_2} (f^2(t) - 2f(t)C\varphi(t) + C^2\varphi^2(t)) dt$$

Debido a que el operador integrador es un operador lineal, se tiene que:

$$E_e = \int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt - 2C \int_{t_1}^{t_2} f(t)\varphi(t) dt + C^2 \int_{t_1}^{t_2} \varphi^2(t) dt$$

$$E_e = E_f - 2C \int_{t_1}^{t_2} f(t)\varphi(t) dt + C^2 E_\varphi$$

Además, tanto la energía de la señal $f(t)$ como de la señal de referencia $\varphi(t)$ son independientes de la constante C , se tiene que:

$$\frac{dE_e}{dC} = -2 \int_{t_1}^{t_2} f(t)\varphi(t) dt + 2CE_\varphi = 0$$

Obteniendo un valor de la constante C óptimo para un error mínimo en la representación de la señal $f(t)$ dado como:

$$C = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)\varphi(t) dt}{E_\varphi}$$

$$C = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)\varphi(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)\varphi(t) dt} ; \quad [t_1, t_2] \quad (2.2.4)$$

Nota: Otro criterio para reducir la función error $f_e(t)$ a un valor mínimo en un intervalo de tiempo definido $[t_1, t_2]$ es reducir el valor promedio de la función en este intervalo:

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} (f(t) - C\varphi(t)) dt$$

Pero si las señales oscilan entre valores positivos y valores negativos, este criterio resulta ser inadecuado ya que se va a perder información de energía obteniendo una información falsa de la energía que realmente transporta la señal de análisis ya que algunos términos se cancelarán debido a esta oscilación. Un ejemplo es una forma de onda sinusoidal, si se calcula su valor promedio en el intervalo de tiempo igual a un período, se tendrá valor promedio nulo ya que los términos positivos se verán anulados por los términos negativos de la señal y este resultado es falso ya que la señal sinusoidal sí transporta una cierta cantidad de energía.

Si se comparan las expresiones (2.1.7) y (2.2.4), se puede encontrar una similitud entre ellas y lograr establecer una analogía en el concepto de ortogonalidad de vectores y el de señales. Por lo tanto, el producto escalar entre dos señales $f(t)$ y $\varphi(t)$, se define como:

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\varphi(t)dt; \quad [t_1, t_2] \quad (2.2.5)$$

Además, si el producto escalar entre estas dos señales $f(t)$ y $\varphi(t)$ es igual a cero en el intervalos $[t_1, t_2]$, se dice que son señales ortogonales (concepto que se expresó anteriormente en el análisis de vectores).

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\varphi(t)dt = 0; \quad [t_1, t_2]$$

Teniendo en cuenta este concepto, observemos qué ocurre si se sabe que la función de error $f_e(t)$ es ortogonal a la función de referencia escogida $\varphi(t)$. Partiendo de la expresión 2.2.1, al realizar un producto escalar en ambos lado de la igualdad, se tiene que:

$$\langle f(t), \varphi(t) \rangle = \langle C\varphi(t) + f_e(t), \varphi(t) \rangle$$

Aplicando algunas propiedades del producto escalar:

$$\langle f(t), \varphi(t) \rangle = C \langle \varphi(t), \varphi(t) \rangle + \langle f_e(t), \varphi(t) \rangle$$

Donde el producto escalar entre la señal de función de error $f_e(t)$ y la señal de referencia $\varphi(t)$ es nulo porque ambas señales son mutuamente ortogonales ($\langle f_e(t), \varphi(t) \rangle = 0$), obteniendo nuevamente una expresión para la constante C que es exactamente igual a la expresada anteriormente (2.2.4):

$$C = \frac{\langle f(t), \varphi(t) \rangle}{\langle \varphi(t), \varphi(t) \rangle} \rightarrow C = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)\varphi(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)\varphi(t)dt} \quad [t_1, t_2]$$

2.3. ESPACIO ORTOGONAL DE SEÑALES. [2] Ahora bien, así como un vector se puede representar en un espacio vectorial por una familia vectorial ortogonal, de igual manera, es posible representar una señal por un conjunto de señales mutuamente ortogonales. Esta analogía existente entre un espacio ortogonal de vectores y un espacio ortogonal de señales no se detallará en este documento debido a que se realizó un análisis previo en la analogía entre vectores y señales que será suficiente para la construcción del concepto de espacio ortogonal de señales. Aun así, este análisis se podrá encontrar en la referencia.

Sea el conjunto de señales $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ se dice que dos señales de este conjunto son ortogonales entre sí o mutuamente ortogonales en el intervalo $[t_1, t_2]$ si se cumple que:

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_i(t)\varphi_j(t)dt = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ E_\varphi, & i = j \end{cases} \quad (2.3.1)$$

Si además, el conjunto de señales mutuamente ortogonales entre si tienen un valor de energía de magnitud 1 ($E_\varphi = 1$), se dice que el espacio de señales se encuentra ORTONORMALIZADO o el conjunto de señales analizadas es ORTONORMAL.

Ahora bien, si se considera el problema de representar la función de análisis $f(t)$ usando una familia de señales ortogonales en el intervalo $[t_1, t_2]$, se tiene que:

$$f(t) \cong C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t) + \dots + C_n\varphi_n(t) = \sum_{j=1}^n C_j\varphi_j(t) \quad (2.3.2)$$

Donde la señal de error está dad como:

$$f_e(t) = f(t) - \sum_{j=1}^n C_j\varphi_j(t) \quad (2.3.3)$$

Utilizando el mismo criterio de aproximación, utilizando en la sección 2.2 se obtienen los coeficientes que minimizan el error de la representación de la señal dada en término de la familia de señales mutuamente ortogonales:

$$\begin{aligned} \langle f(t), \varphi_j(t) \rangle &= \langle \sum_{j=1}^n C_j\varphi_j(t) + f_e(t), \varphi_j(t) \rangle \\ \langle f(t), \varphi_j(t) \rangle &= \langle \sum_{j=1}^n C_j\varphi_j(t), \varphi_j(t) \rangle + \langle f_e(t), \varphi_j(t) \rangle \\ \langle f(t), \varphi_j(t) \rangle &= C_1 \langle \varphi_1(t), \varphi_j(t) \rangle + C_2 \langle \varphi_2(t), \varphi_j(t) \rangle + \dots + C_j \langle \varphi_j(t), \varphi_j(t) \rangle + \\ &+ \dots + C_n \langle \varphi_n(t), \varphi_j(t) \rangle + \langle f_e(t), \varphi_j(t) \rangle \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que es una familia ortogonal de señales como se especificó en las expresiones dadas en 2.3.1, se tiene que:

$$\langle f(t), \varphi_j(t) \rangle = C_j \langle \varphi_j(t), \varphi_j(t) \rangle$$

Obteniendo así una expresión para la constante j-ésima de la familia de señales ortogonales seleccionada.

$$\begin{aligned} C_j &= \frac{\langle f(t), \varphi_j(t) \rangle}{\langle \varphi_j(t), \varphi_j(t) \rangle} = \frac{\langle f(t), \varphi_j(t) \rangle}{E_\varphi} \\ C_j &= \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)\varphi_j(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} \varphi_j(t)\varphi_j(t)dt} \quad [t_1, t_2] \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Este análisis también se puede realizar mediante el concepto de optimización como se realizó anteriormente en la sección 2.2 y partiendo desde la expresión 2.3.3:

$$E_e = \int_{t_1}^{t_2} \left(f(t) - \sum_{j=1}^n C_j \varphi_j(t) \right)^2 dt$$

$$E_e = \int_{t_1}^{t_2} \left[f^2(t) - 2f(t) \sum_{j=1}^n C_j \varphi_j(t) + \left(\sum_{j=1}^n C_j \varphi_j(t) \right)^2 \right] dt \quad (2.3.5)$$

Donde:

$$\left(\sum_{j=1}^n C_j \varphi_j(t) \right)^2 = \left(\sum_{j=1}^n C_j \varphi_j(t) \right) \left(\sum_{j=1}^n C_j \varphi_j(t) \right)$$

Expandiendo las sumas y aplicando el concepto de ortogonalidad, se tiene que:

$$\left(\sum_{j=1}^n C_j \varphi_j(t) \right)^2 = \sum_{j=1}^n C_j^2 \varphi_j^2(t)$$

Obteniendo así:

$$E_e = \int_{t_1}^{t_2} [f^2(t) - 2f(t) \sum_{j=1}^n C_j \varphi_j(t) + \sum_{j=1}^n C_j^2 \varphi_j^2(t)] dt \quad (2.3.6)$$

Si se deriva en ambos lados de la igualdad y se iguala a cero, se obtiene el valor de la constante C_j para el cual se obtiene el mínimo error en la representación de $f(t)$ a través del conjunto de señales $\{\varphi_j(t)\}_{j=1}^n$ escogido.

$$\frac{dE_e}{dC_j} = \frac{d}{dC_j} \int_{t_1}^{t_2} \left[f^2(t) - 2f(t) \sum_{j=1}^n C_j \varphi_j(t) + \sum_{j=1}^n C_j^2 \varphi_j^2(t) \right] dt$$

Como los operadores de integración, suma y diferenciación son operadores lineales, se puede reescribir la expresión anterior de la siguiente manera:

$$\frac{dE_e}{dC_j} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d}{dC_j} f^2(t) \right) dt - 2 \frac{d}{dC_j} \left(\sum_{j=1}^n C_j \int_{t_1}^{t_2} (f(t) \varphi_j(t)) dt \right) + \frac{d}{dC_j} \left(\sum_{j=1}^n C_j^2 \int_{t_1}^{t_2} \varphi_j^2(t) dt \right) = 0$$

Obteniendo:

$$-2 \int_{t_1}^{t_2} (f(t) \varphi_j(t)) dt + 2C_j \int_{t_1}^{t_2} \varphi_j^2(t) dt = 0$$

$$C_j = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) \varphi_j(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} \varphi_j^2(t) dt}$$

Obteniendo nuevamente la expresión 2.3.4 aplicando el método de optimización.

Ahora bien, si además de ser un espacio de señales mutuamente ortogonal, la señal de error $f_e(t)$ es nula, se dice que en la familia $\{\varphi_j(t)\}_{j=1}^n$ no existe algún $\varphi_j(t)$ que se pueda escribir como una combinación lineal de otro miembro de esta familia $\varphi_i(t)$, obteniendo así una representación completa de la señal de análisis $f(t)$, formando una base, a la cual se le conoce como la serie generalizada de Fourier:

$$f(t) = \sum_{j=1}^n C_j \varphi_j(t) \quad \forall t \in [t_1, t_2] \quad (2.3.7)$$

Siendo:

$$C_j = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) \varphi_j(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} \varphi_j(t) \varphi_j(t) dt}$$

Si se desea conocer la energía de la señal de análisis en término del conjunto $\{\varphi_j(t)\}_{j=1}^n$, se puede calcular partiendo de la expresión 2.3.7 de la siguiente manera:

$$f^2(t) = \left(\sum_{j=1}^n C_j \varphi_j(t) \right)^2 \quad \forall t \in [t_1, t_2]$$

Aplicando el concepto de ortogonalidad, se encuentra que:

$$f^2(t) = \sum_{j=1}^n C_j^2 \varphi_j^2(t)$$

$$E_f = \int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^n C_j^2 \varphi_j^2(t) dt$$

Reorganizando términos debido a la linealidad de los operadores, se tiene que:

$$E_f = \sum_{j=1}^n \left(C_j^2 \int_{t_1}^{t_2} \varphi_j^2(t) dt \right)$$

Obteniendo así que la energía de la señal de análisis $f(t)$ se puede calcular a través de los coeficientes C_j y de la energía del conjunto ortogonal escogido $\{\varphi_j(t)\}_{j=1}^n$:

$$E_f = \sum_{j=1}^n (C_j^2 E_\varphi)$$

A esta expresión se le conoce con el nombre de Teorema de Parseval para señales de energía.

3. SERIE EXPONENCIAL DE FOURIER. [3] La serie exponencial de Fourier es un caso particular de representación de señales complejas donde las funciones bases $\varphi_n(t)$ es de la forma exponencial compleja:

$$\varphi_n(t) = e^{jn\omega_0 t}$$

Donde ω_0 es una constante que debe determinarse y la función n-ésima se conoce como el armónico n-ésimo de la función a representar $f(t)$.

De acuerdo a lo anterior, las expresiones para la serie de Fourier serán de la forma:

$$f(t) \cong \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \quad \forall t \in [t_1, t_2] \quad (3.1)$$

Y debido a que la representación en series exponenciales de Fourier sirve para representar señales complejas ($j = \sqrt{-1}$), se tiene que los coeficientes se obtienen de la forma:

$$F_n = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) \varphi_n^*(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} \varphi_n(t) \varphi_n^*(t) dt} \quad (3.2)$$

Ahora bien, hay que aclarar para qué valores de ω_0 esta representación funciona y estos se obtienen aplicando el concepto de ortogonalidad de la función base $\varphi_n(t)$:

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_n(t) \varphi_m^*(t) dt \quad (3.3)$$

No sobra aclarar que $\varphi_m^*(t)$ es el conjugado complejo de la señal de base $\varphi_m(t)$ y que n y m son números enteros. Obteniendo así que:

$$\varphi_n(t) = e^{jn\omega_0 t}; \quad \varphi_m^*(t) = e^{-jm\omega_0 t}$$

Remplazando las expresiones anteriores en la expresión 3.3, se tiene:

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_n(t) \varphi_m^*(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} e^{jn\omega_0 t} e^{-jm\omega_0 t} dt = \int_{t_1}^{t_2} e^{j(n-m)\omega_0 t} dt$$

Entonces, tenemos que:

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{j(n-m)\omega_0 t} dt = \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq m \\ E_\varphi, & \text{si } n = m \end{cases}$$

Observemos el primer caso ($n \neq m$). Para que esta expresión sea cierta, se debe analizar para qué valores de ω_o se cumple que:

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{j(n-m)\omega_o t} dt = 0$$

Integrando y resolviendo la expresión:

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{j(n-m)\omega_o t} dt = \frac{1}{j(n-m)\omega_o} (e^{j(n-m)\omega_o t_2} - e^{j(n-m)\omega_o t_1}) \quad (3.4)$$

Factorizando el término $e^{j(n-m)\omega_o t_1}$, tenemos que:

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{j(n-m)\omega_o t} dt = \frac{e^{j(n-m)\omega_o t_1}}{j(n-m)\omega_o} (e^{j(n-m)\omega_o(t_2-t_1)} - 1) = 0$$

Obteniendo así dos soluciones siempre y cuando $n \neq m$, porque de lo contrario surge una indeterminación:

$$e^{j(n-m)\omega_o t_1} = 0 \rightarrow \text{No existe!}$$

$$e^{j(n-m)\omega_o(t_2-t_1)} - 1 = 0 \rightarrow \omega_o(t_2 - t_1) = 0 \rightarrow t_1 = t_2$$

De la expresión, se obtiene una solución particular, pero para un caso general, conociendo la periodicidad de la exponencial compleja, se puede obtener infinitas nuevas solución para ω_o para que esta condición se cumpla:

$$\omega_o(t_2 - t_1) = 2k\pi \text{ siendo } k \text{ un número entero}$$

Asumiendo un valor de $k = 1$, para obtener un único valor de ω_o , se tiene que:

$$\omega_o = \frac{2\pi}{(t_2-t_1)} \quad (3.5)$$

Y así, obtenemos una condición que nos asegura que la familia de señales escogida $\varphi_n(t) = e^{jn\omega_o t}$ formen un conjunto ortogonal.

Ahora bien, para el segundo caso ($n = m$), se tiene que:

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{j(n-m)\omega_o t} dt = \int_{t_1}^{t_2} dt = t_2 - t_1; \quad \forall n = m$$

Y así obtener finalmente:

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{j(n-m)\omega_0 t} dt = \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq m \\ t_2 - t_1, & \text{si } n = m \end{cases} \quad \text{si y solo si } \omega_0 = \frac{2\pi}{(t_2 - t_1)}$$

Utilizando un conjunto completo de funciones $\varphi_n(t) = e^{jn\omega_0 t}$, es posible representar cualquier función $f(t)$ de energía finita en un intervalo de tiempo definido $[t_1, t_2]$ mediante la expresión:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \quad \forall t \in [t_1, t_2]; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{(t_2 - t_1)}$$

$$F_n = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) \varphi_n^*(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} \varphi_n(t) \varphi_n^*(t) dt} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt}{(t_2 - t_1)}$$

4. SERIE TRIGONOMÉTRICA DE FOURIER. [4] Así como la serie exponencial de Fourier nos permite representar señales complejas, un caso más particular de representaciones de señales es la serie trigonométrica de Fourier (ver figura 4.1) que nos permite representar señales únicamente reales donde las funciones bases $\varphi_n(t)$ serán combinaciones de señales trigonométricas de senos y cosenos.

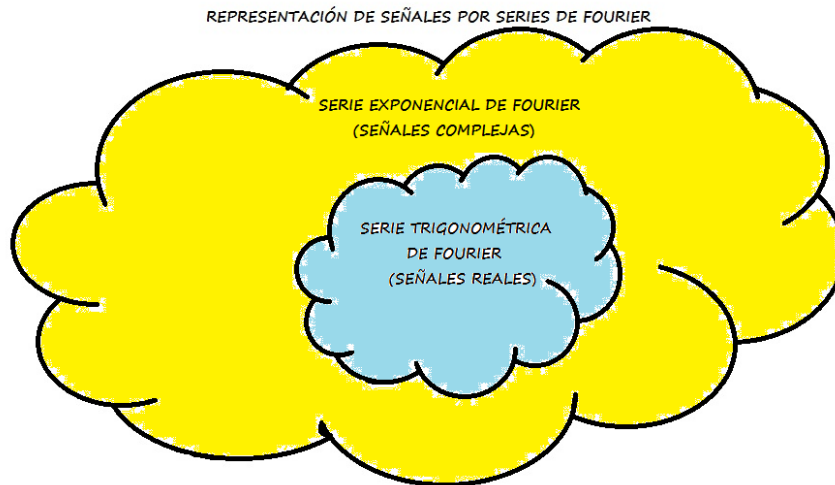


Figura 4.1: Esquema de las Representaciones de Señales por Series de Fourier

Una señal $f(t)$ compleja, se puede representar como la suma de dos señales complementarias, una de carácter exclusivamente real $f_r(t)$ y otra exclusivamente de carácter imaginario $f_i(t)$, tal como se muestra en la expresión 4.1:

$$f(t) = f_r(t) + jf_i(t) \quad (4.1)$$

Si se asume que la señal de análisis es completamente de carácter real, es posible representar este tipo de señales a través de una versión particular alternativa de la serie exponencial de Fourier. En otra palabra, se dice que:

$$f(t) = \text{Re}\{f(t)\} = \text{Re}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Re}\{F_n e^{jn\omega_0 t}\}; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{t_2 - t_1}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\text{Re}\{f_1 f_2\} = \text{Re}\{f_1\}\text{Re}\{f_2\} - \text{Im}\{f_1\}\text{Im}\{f_2\}$$

Donde f_1 y f_2 son funciones complejas de la forma:

$$f_1 = f_{r1} + jf_{i1}; \quad f_2 = f_{r2} + jf_{i2}$$

$$f_{r1} = \text{Re}\{f_1\}; \quad f_{r2} = \text{Re}\{f_2\}$$

$$f_{i1} = \text{Im}\{f_1\}; \quad f_{i2} = \text{Im}\{f_2\}$$

Por lo tanto:

$$\text{Re}\{f_1 f_2\} = \text{Re}\{(f_{r1} + jf_{i1})(f_{r2} + jf_{i2})\} = \text{Re}\{f_{r1}f_{r2} + jf_{r1}f_{i2} + jf_{i1}f_{r2} + j^2 f_{i1}f_{i2}\}$$

$$\text{Re}\{f_1 f_2\} = \text{Re}\{(f_{r1}f_{r2} - f_{i1}f_{i2}) + j(f_{r1}f_{i2} + f_{i1}f_{r2})\} = f_{r1}f_{r2} - f_{i1}f_{i2}$$

Obteniendo así:

$$\text{Re}\{f_1 f_2\} = \text{Re}\{f_1\}\text{Re}\{f_2\} - \text{Im}\{f_1\}\text{Im}\{f_2\} \quad (4.2)$$

Teniendo en cuenta que la función exponencial compleja se puede escribir en términos de las funciones trigonométricas seno y coseno de acuerdo a las serie de Taylor:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{x^{2n}}{2n!} \quad \text{siendo } n \text{ un número entero positivo}$$

$$\text{sen } x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{siendo } n \text{ un número entero positivo}$$

$$e^{jx} = 1 + jx - \frac{x^2}{2!} - j\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + j\frac{x^5}{5!} - \dots + j^n \frac{x^n}{n!} \quad \text{siendo } n \text{ un número entero positivo}$$

Sumando las series de Taylor de las función coseno junto con la función seno pre multiplicada por el número imaginario $j = \sqrt{-1}$, tenemos que:

$$\cos x + j \text{sen } x = e^{jx}$$

$$\cos x = \text{Re}\{e^{jx}\}; \quad \text{sen } x = \text{Im}\{e^{jx}\}$$

Teniendo así, nuevamente de la expresión:

$$f(t) = \operatorname{Re}\{f(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{Re}\{F_n e^{jn\omega_0 t}\}$$

$$\operatorname{Re}\{f(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{Re}\{F_n\} \operatorname{Re}\{e^{jn\omega_0 t}\} - \operatorname{Im}\{F_n\} \operatorname{Im}\{e^{jn\omega_0 t}\}$$

$$\operatorname{Re}\{f(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{Re}\{F_n\} \cos n\omega_0 t - \operatorname{Im}\{F_n\} \operatorname{sen} n\omega_0 t \quad (4.3)$$

Ahora bien, para obtener la parte real de la constante $F_n, \operatorname{Re}\{F_n\}$, y la parte imaginaria de $F_n, \operatorname{Im}\{F_n\}$, es necesario obtener su conjugado complejo, F_n^* .

$$F_n = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt}{(t_2 - t_1)}; \quad F_n = \operatorname{Re}\{F_n\} + j \operatorname{Im}\{F_n\} \quad (4.4)$$

$$F_n^* = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) e^{jn\omega_0 t} dt}{(t_2 - t_1)} = F_{-n}; \quad F_{-n} = \operatorname{Re}\{F_n\} - j \operatorname{Im}\{F_n\} \quad (4.5)$$

De las expresiones 4.3 y 4.5, tenemos que:

$$\operatorname{Re}\{F_n\} = \frac{F_n + F_{-n}}{2}; \quad \operatorname{Im}\{F_n\} = \frac{F_n - F_{-n}}{2j}$$

Definamos ahora los coeficientes de Fourier para la serie trigonométrica:

$$a_0 \triangleq \operatorname{Re}\{F_0\} = F_0$$

$$a_n \triangleq F_n + F_{-n} = 2 \operatorname{Re}\{F_n\}$$

$$b_n \triangleq j(F_n - F_{-n}) = -2 \operatorname{Im}\{F_n\}$$

De las definiciones anteriores, se tiene que a_n es una función par de n y b_n es una función impar de n .

$$a_n = a_{-n}; \quad b_n = -b_{-n}$$

Además, teniendo en cuenta que:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{Re}\{F_n\} \cos n\omega_0 t = \dots + \operatorname{Re}\{F_{-2}\} \cos(-2\omega_0 t) + \operatorname{Re}\{F_{-1}\} \cos(-\omega_0 t) + \\ + \operatorname{Re}\{F_0\} + \operatorname{Re}\{F_{-2}\} \cos(\omega_0 t) + \operatorname{Re}\{F_2\} \cos(2\omega_0 t) + \dots$$

Donde la función $\cos n\omega_0 t$ es par, obteniendo así únicamente valores de F_n pares, por lo tanto a_n es par:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{Re}\{F_n\} \cos n\omega_0 t = \operatorname{Re}\{F_0\} + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re}\{F_n\} \cos(n\omega_0 t)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{Re}\{F_n\} \cos n\omega_0 t = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) \quad (4.6)$$

De igual manera se obtiene la representación del segundo término de la suma, pero esta vez, los valores que se obtienen para F_n son impares al igual b_n :

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{Im}\{F_n\} \operatorname{sen} n\omega_0 t &= \sum_{n=1}^{\infty} 2\operatorname{Im}\{F_n\} \operatorname{sen}(n\omega_0 t) \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{Im}\{F_n\} \operatorname{sen} n\omega_0 t &= \sum_{n=1}^{\infty} -b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Obteniendo finalmente una expresión para la serie trigonométrica de Fourier al sumar los dos términos que la componen (expresión 4.6 y 4.7):

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t)] \quad \forall t \in [t_1, t_2] \quad (4.8)$$

Los coeficientes se obtendrán con las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt}{(t_2 - t_1)} \\ a_0 &= \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) dt}{(t_2 - t_1)} \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$a_n = 2\operatorname{Re}\{F_n\} = 2\operatorname{Re}\left\{ \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt}{(t_2 - t_1)} \right\} = \frac{2}{(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt \quad (4.10)$$

$$b_n = -2\operatorname{Im}\{F_n\} = -2\operatorname{Im}\left\{ \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt}{(t_2 - t_1)} \right\} = \frac{2}{(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \operatorname{sen}(n\omega_0 t) dt \quad (4.11)$$

La serie trigonométrica de Fourier también se puede representar de la forma:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) \quad (4.12)$$

Donde:

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}; \quad \varphi_n = \tan^{-1}\left(-\frac{b_n}{a_n}\right) \quad (4.13)$$

Y estas expresiones se obtienen de la siguiente forma:

$$a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t) = C_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$$

Si $n\omega_0 t = 0$, tenemos que:

$$a_n = C_n \cos(\varphi_n)$$

Si $n\omega_0 t = \frac{\pi}{2}$, tenemos que:

$$b_n = C_n \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_n\right) = -C_n \operatorname{sen}(\varphi_n)$$

Por lo tanto:

$$a_n^2 + b_n^2 = C_n^2(\operatorname{sen}^2 \varphi_n + \cos^2 \varphi_n) = C_n^2$$

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

Para el cálculo de φ_n , se tiene que:

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{-C_n \operatorname{sen}(\varphi_n)}{C_n \cos(\varphi_n)} = -\tan(\varphi_n)$$

$$\varphi_n = \tan^{-1}\left(-\frac{b_n}{a_n}\right)$$

También se pueden obtener a través de los coeficientes de la serie exponencial de Fourier:

$$C_n = 2|F_n| = 2\sqrt{F_n F_n^*}; \quad \varphi_n = \tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{Im}\{F_n\}}{\operatorname{Re}\{F_n\}}\right)$$

Y estas expresiones se obtienen de la siguiente manera:

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \sqrt{(F_n + F_{-n})^2 + j^2(F_n - F_{-n})^2} = \sqrt{4F_n F_{-n}}$$

$$C_n = 2|F_n| = 2\sqrt{F_n F_n^*}$$

$$\varphi_n = \tan^{-1}\left(-\frac{b_n}{a_n}\right) = \tan^{-1}\left(-\frac{-2\operatorname{Im}\{F_n\}}{2\operatorname{Re}\{F_n\}}\right)$$

$$\varphi_n = \tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{Im}\{F_n\}}{\operatorname{Re}\{F_n\}}\right)$$

5. CASOS PARTICULARES DEBIDO A LA FORMA DE ONDA DE LA SEÑAL A REPRESENTAR. Ahora bien, después de hablar de la representación de señales a través de la serie exponencial y trigonométrica de Fourier, hay que mencionar algunos casos en los cuales se simplifica estas representaciones debido la forma de onda de la señal a representar $f(t)$.

5.1. PARIDAD DE LA SEÑAL A REPRESENTAR. El cálculo de los coeficientes de la serie trigonométrica de Fourier, a_n y b_n , se pueden simplificar dependiendo de la

paridad de la señal a representar $f(t)$ y si los términos se calculan en un intervalo simétrico $[-\tau/2, \tau/2]$ donde este intervalo no es necesariamente un período de la señal.

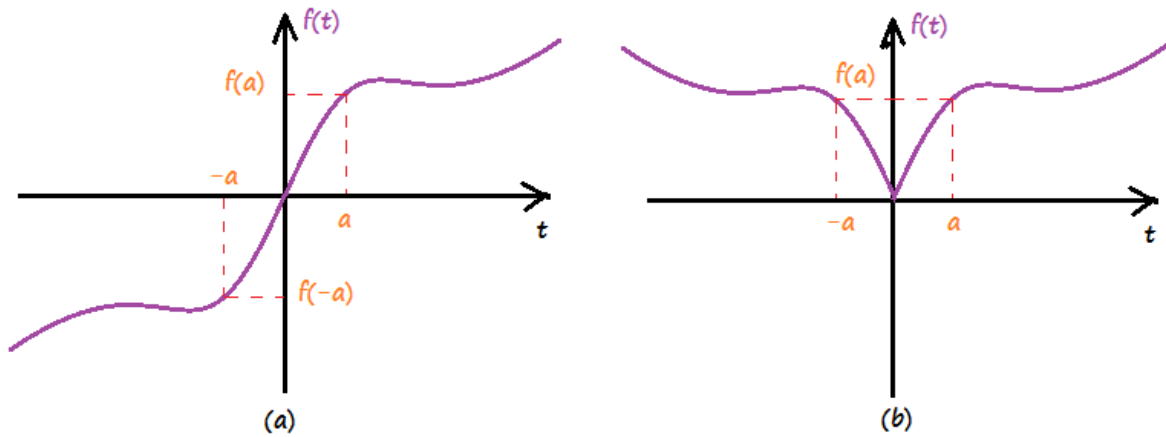


Figura 5.1.1: Paridad de una señal. (a) Señal Impar. (b) Señal Par.

Se dice que una función es impar, como se muestra en la figura 5.1.1 (a), si se tiene que:

$$f(t) = -f(-t)$$

Se dice que una función es par, como se muestra en la figura 5.1.1 (b), si se tiene que:

$$f(t) = f(-t)$$

Ahora bien, teniendo que:

$$z(t) = f(t)g(t)$$

A continuación, se procederá a mostrar los diferentes casos posibles de acuerdo a la paridad de $f(t)$ y $g(t)$:

- Sea $f(t)$ una función par al igual que $g(t)$, se tiene que $z(t)$ es también una función par:

$$z(t) = f(t)g(t) = f(-t)g(-t) = z(-t)$$

- Sea $f(t)$ una función par y $g(t)$ una función impar, se tiene que $z(t)$ es una función impar:

$$z(t) = f(t)g(t) = f(-t)[-g(-t)] = -f(-t)g(-t) = -z(-t)$$

- Sea $f(t)$ una función impar al igual que $g(t)$, se tiene que $z(t)$ es función par:

$$z(t) = f(t)g(t) = [-f(-t)][-g(-t)] = f(-t)g(-t) = z(-t)$$

Ahora, lo que sigue es saber cuánto será el área bajo la curva formada de acuerdo a la paridad de la función a integrar en un intervalo de trabajo simétrico $[-\tau/2, \tau/2]$:

- Cuando $f(t)$ es par:

$$\int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(t) dt = \int_{-\tau/2}^0 f(t) dt + \int_0^{\tau/2} f(t) dt = \int_{-\tau/2}^0 f(-t) dt + \int_0^{\tau/2} f(t) dt$$

Realizando una sustitución tal que: $u = -t \rightarrow du = -dt$, se tiene que:

$$\int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(t) dt = - \int_{\tau/2}^0 f(u) du + \int_0^{\tau/2} f(t) dt = \int_0^{\tau/2} f(u) du + \int_0^{\tau/2} f(t) dt$$

Por lo tanto, como u t son variables que al integrar están evaluadas bajo los mismos límites integradores y definen la misma función de análisis, se obtiene:

$$\int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(t) dt = 2 \int_0^{\tau/2} f(t) dt \quad \text{siempre y cuando } f(t) \text{ sea una función par} \quad (5.1.1)$$

- Cuando $f(t)$ es impar:

$$\int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(t) dt = \int_{-\tau/2}^0 f(t) dt + \int_0^{\tau/2} f(t) dt = - \int_{-\tau/2}^0 f(-t) dt + \int_0^{\tau/2} f(t) dt$$

Realizando una sustitución tal que: $u = -t \rightarrow du = -dt$, se tiene que:

$$\int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(t) dt = \int_{\tau/2}^0 f(u) du + \int_0^{\tau/2} f(t) dt = - \int_0^{\tau/2} f(u) du + \int_0^{\tau/2} f(t) dt$$

Por lo tanto, como u t son variables que al integrar están evaluadas bajo los mismos límites integradores y definen la misma función de análisis, se obtiene:

$$\int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(t) dt = 0 \quad \text{siempre y cuando } f(t) \text{ sea una función impar} \quad (5.1.2)$$

De las expresiones 5.1.1 y 5.1.2, se puede obtener una simplificación en los cálculos de los coeficientes de Fourier de la serie trigonométrica de Fourier tales como:

$$a_n = \frac{2}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt; \quad b_n = \frac{2}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

Donde la función coseno es una función par y la función seno es una función impar.

- Cuando la señal a representar $f(t)$ es una función par:

$$a_0 = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt = \frac{2}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} g_{par}(t) dt = \frac{4}{\tau} \int_0^{\tau/2} g_{par}(t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt = \frac{2}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} g_{impar}(t) dt = 0$$

- Cuando la señal a representar $f(t)$ es una función par:

$$a_0 = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(t) dt = 0$$

$$a_n = \frac{2}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt = \frac{2}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} g_{impar}(t) dt = 0$$

$$b_n = \frac{2}{(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt = \frac{2}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} g_{par}(t) dt = \frac{4}{\tau} \int_0^{\tau/2} g_{par}(t) dt$$

Nota: No necesariamente los términos que no se anulan por concepto de paridad serán diferente de cero, es posible que surjan casos donde posiblemente estos coeficientes de Fourier sean cero después de integrar las expresiones.

5.2. EXTENSIÓN PERIÓDICA [5]. Como no se ha definido la serie trigonométrica de Fourier o la serie exponencial de Fourier para un intervalo $[t_1, t_2]$ ya que por fuera de este no se conoce el comportamiento de la función a representar $f(t)$ y mucho menos su representación. Sin embargo, si la señal a representar es una señal periódica, la señal de energía es finita en un periodo de análisis, por consiguiente, es posible utilizar cualesquiera de las serie de Fourier mencionada anteriormente para representar la señal en ese período. Es importante notar que la representación obtenida en este periodo no solamente describe dentro de ese período sino que es válida para cualquier valor en el tiempo $(-\infty, \infty)$.

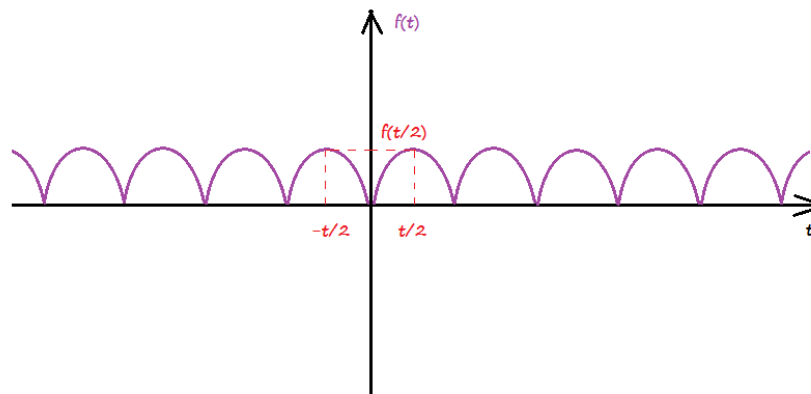


Figura 5.2.1: Función Periódica con período t .

6. Recopilación. En esta sección, se recopilarán las más importantes expresiones, conceptos y fundamentos para la representación y análisis de señales a través de las series de Fourier.

SERIE GENERALIZADA DE FOURIER

Sea:

$$f(t) = \sum_{j=1}^n C_j \varphi_j(t) \quad \forall t \in [t_1, t_2]$$

Siendo:

$$C_j = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) \varphi_j(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} \varphi_j(t) \varphi_j(t) dt}$$

SERIE EXPONENCIAL DE FOURIER (SEÑALES COMPLEJAS)

Sea

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \quad \forall t \in [t_1, t_2]; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{(t_2 - t_1)}$$

Siendo:

$$F_n = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt}{(t_2 - t_1)}$$

SERIE TRIGONOMÉTRICA DE FOURIER (SEÑALES REALES)

Sea:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t)]; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{(t_2 - t_1)} \quad \forall t \in [t_1, t_2]$$

Siendo:

$$a_0 = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) dt}{(t_2 - t_1)}$$

$$a_n = \frac{2}{(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \operatorname{sen}(n\omega_0 t) dt$$

Donde, además, si la señal de análisis $f(t)$ es una función par, el coeficiente de Fourier b_n se anula ($b_n = 0$). Si la señal de análisis $f(t)$ es una función impar, los coeficientes a_0 y a_n se anula ($a_0 = a_n = 0$). Más esto no implica que los coeficientes de la serie trigonométrica de Fourier que no se anulan por la paridad de $f(t)$ sean diferente de cero.

Ahora bien, si la señal de análisis es una función periódica, al representar dicha señal en un período de la señal de análisis por cualquiera de las series de Fourier, tanto la serie

|
exponencial como la serie trigonométrica de Fourier, la representación de Fourier describe perfectamente la señal de análisis $f(t)$ para todo valor del tiempo $(-\infty, \infty)$

7. Referencias.

1. B.P. Lathi: 'Introducción a la teoría y sistemas de comunicación', 2002, pp. 15-20
2. B.P. Lathi: 'Introducción a la teoría y sistemas de comunicación', 2002, pp 21-28
3. B.P. Lathi: 'Introducción a la teoría y sistemas de comunicación', 2002, pp 37-39
4. B.P. Lathi: 'Introducción a la teoría y sistemas de comunicación', 2002, pp 34-35
5. B.P. Lathi: 'Introducción a la teoría y sistemas de comunicación', 2002, pp 39-40