RESUMEN DE

ECUACIONES DIFERENCIALES

Alejandro Martínez Acosta
Profesor Asociado
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias Básicas
Universidad Tecnológica de Pereira

Pereira, 2012

Capítulo 1. Introducción a las Ecuaciones Diferenciales

Definiciones y terminología.

Ecuación diferencial

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{1a}$$

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \tag{1b}$$

Clasificación

- Según el tipo: Ordinarias (EDO), parciales (EDP)
- Según el orden: orden 1, orden 2,..., orden n
- Según la linealidad
  Lineales: son de la forma $a_n(x)y^{(n)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g(x)$
  No lineales: No tienen la forma anterior.

Soluciones

- Explícita: $y = \phi(x)$, $x \in I$ que satisface (1a) o (1b).
- Implícita: $G(x, y) = 0$ con $y = \phi(x)$, $x \in I$.
- Familia explícita: $y = \phi(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$ con $c_1, c_2, \dots, c_n$ constantes.
- Familia implícita: $G(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$ con $c_1, c_2, \dots, c_n$ constantes.
- Solución singular: Solución que no hace parte de la familia de soluciones.

Problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \text{Resolver } & F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \\ \text{Sujeto a } & y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{aligned}$$

Teorema 1 (Teorema de existencia y unicidad (TEU))**.** Considere el PVI de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y); \quad y(x_0) = y_0. \tag{2}$$

Si $f(x, y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ son funciones continuas en un rectángulo $R = \{(x, y) \mid a < x < b,\ c < y < d\}$ que contiene al punto (x_0, y_0), entonces el problema de valor inicial (2) tiene una única solución $\phi(x)$ en algún intervalo I tal que $x_0 - h < x < x_0 + h$, donde h es un número real positivo.

Ecuación diferencial de una familia de curvas

1. Si $G(x, y) = c$ define a y como una función diferenciable de x en algún intervalo I, entonces

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{G_x}{G_y},\ G_y \neq 0 \ \text{ ó } \ G_x dx + G_y dy = 0$$

2. Si $F(x, y, c) = 0$ define a y como una función diferenciable de x en algún intervalo I, se despeja c y se usa la parte 1.

Capítulo 2. Ecuaciones diferenciales de primer orden.

Ecuación diiferencial que tiene cualquiera de las siguientes formas

$$F(x, y, y') = 0 \tag{3a}$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = f(x, y) \tag{3b}$$

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{3c}$$

Ecuaciones de variables separables

Son de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = A(x)B(y) \quad \text{o} \quad M(x)dx + N(y)dy = 0$$

Ecuaciones lineales.

Son de la forma

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x) \tag{4a}$$

$$\frac{dx}{dy} + p(y)x = f(y) \tag{4b}$$

Para resolver (4a) se busca un factor integrante de la forma

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}.$$

Una familia de soluciones de (4a) es

$$y(x) = [\mu(x)]^{-1} \left[\int f(x)\ \mu(x)dx + C \right]$$

Ecuaciones exactas.

La ecuación diferencial $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ es exacta si

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \qquad \text{Condición de compatibilidad}$$

Par resolver una ecuación diferencial exacta se busca una función $F(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y) \tag{5a}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y) \tag{5b}$$

De (5a) y (5b) se obtiene $F(x, y)$. Una famila de soluciones de la ecuación diferencial está dada por

$$F(x, y) = c.$$

Factores integrantes especiales.

Cuando
$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{6}$$
no es exacta, pero
$$\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0, \tag{7}$$
si lo es, entonces $\mu(x, y)$ es un factor integrante de (6).

Para encontrar un factor integrante, se usa la condición de compatibilidad. Es decir,
$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu N) = \frac{\partial}{\partial y}(\mu M),$$
es decir,
$$\mu\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{\partial \mu}{\partial y}. \tag{8}$$
Como en general es muy difícil resolver una ecuación en derivadas parciales, se consideran algunos casos particulares:

Caso I: $\mu(x, y) = x^n y^m$, donde n y m se encuentran usando (8).

Caso II: $\mu = \mu(z)$ con $z = h(x, y)$ para alguna función h adecuada. Para hallar dicho factor integrante, se usa la condición (8) y la regla de la cadena:
$$\mu_x = \frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{d\mu}{dz}\frac{\partial z}{\partial x} = z_x\,\frac{d\mu}{dz} \tag{9a}$$
$$\mu_y = \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{d\mu}{dz}\frac{\partial z}{\partial y} = z_y\,\frac{d\mu}{dz} \tag{9b}$$
Algunas opciones para z son: (i) $z = x$, (ii) $z = y$, (iii) $z = x + y$, (iv) $z = x - y$, (v) $z = xy$, (vi) $z = x^2 + y^2$ y (vii) $z = x^2 - y^2$. Para cada uno de estos casos se sustituye (9a) y (9b) en (8), se despeja $\dfrac{d\mu}{\mu} = P(z)dz$ para alguna función $P(z)$ y se encuentra el factor integrante de la forma
$$\mu(z) = e^{\int P(z)dz} \quad \text{con} \quad P(z) = \frac{M_y - N_x}{z_x N - z_y M},\ z = h(x, y) \tag{10}$$

Sustituciones y transformaciones

Otra forma de resolver una ecuación
$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{11}$$
es mediante una sustitución $y = g(x, u)$ para llevar (11) a la forma $\dfrac{du}{dx} = h(x, u)$, que sea más fácil de resolver.

Ecuaciones con coeficientes homogéneos

La ecuación
$$M(x, y)dy + N(x, y)dy = 0 \tag{12}$$
es de coeficientes homogéneos si existe un número real α tal que
$$M(tx, ty) = t^\alpha M(x, y) \quad \text{y} \quad N(tx, ty) = t^\alpha N(x, y).$$
Si la ecuación (12) tiene coeficientes homogéneos, la sustitución $y = ux$ o $x = vy$, la transforma en una de variables separables.

Ecuación de Bernoulli

Son de la forma

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)y^n \tag{13a}$$
$$\frac{dx}{dy} + p(y)x = f(y)x^n \tag{13b}$$

- Si $n = 1$, la ecuación (13a) es lineal y separable y si $n = 0$, la ecuación (13a) es lineal.
- Si $n \neq 0$ y $n \neq 1$, la sustitución $z = y^{1-n}$ transforma la ecuación (13a) en una lineal en z y x.

Ecuaciones de la forma $\frac{dy}{dx} = G(ax + by)$

Se hace la sustitución $u = ax + by$, $\frac{du}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}$

Ecuaciones con coeficientes lineales

Son de la forma

$$(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0 \quad \text{con} \quad a_1b_2 \neq a_2b_1 \tag{14}$$

- Si $c_1 = c_2 = 0$, la ecuación (14) es homogénea
- Si $c_1 \neq c_2$, se busca una traslación de ejes

  $$x = x_1 + h$$
  $$y = y_1 + k$$

  para transformar (14) en una ecuación homogénea. Las constantes h y k se encuentran resolviendo el sistema de ecuaciones lineales

  $$a_1h + b_1k + c_1 = 0$$
  $$a_2h + b_2k + c_2 = 0$$

Derivación parcial

Algunas ecuaciones diferenciales de primer orden de la forma

$$F(x, y, y') = 0, \tag{15}$$

se pueden resolver derivando parcialmente (15) con respecto a y' y luego se encuentra una familia de soluciones de la ecuación resultante en y'.

Familias ortogonales

Si $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\mathcal{C}_1} = f(x, y)$ es la ecuación diferencial de una familia de curvas $\mathcal{C}_1 :\ F(x, y, c_1) = 0$, la ecuación diferencial de la familia ortogonal $\mathcal{C}_2$ es $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\mathcal{C}_2} = -\frac{1}{f(x, y)}$.

Capítulo 3. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales (EDOL) de Orden Superior

Ecuaciones de segundo orden.

Una ecuación diferencial de segundo orden es un expresión de la forma

$$F(x, y, y', y'') = 0 \tag{16a}$$
$$y'' = f(x, y, y') \tag{16b}$$

Ecuación diferencial lineal.

Una EDOL de segundo orden es una expresión que tiene una de las siguientes formas equivalentes:

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = g(x) \tag{17a}$$
$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{17b}$$

Operadores diferenciales.

Teniendo en cuenta que $y' = \dfrac{dy}{dx}$ y $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ y haciendo $D[y] = y'$, $D^2[y] = y''$, las ecuaciones (17a) y (17b) se pueden escribir como

$$L_1[y] = (aD^2 + bD + c)[y] = g(x) \tag{18a}$$
$$L_2[y] = (D^2 + pD + q)[y] = f(x). \tag{18b}$$

$L_1 := aD^2 + bD + c$ y $L_2 := D^2 + pD + q$ se llaman operadores diferenciales de segundo orden, los cuales son transformaciones lineales. Los términos a, b y c de L_1 o p y q de L_1 son los coeficientes del operador y pueden ser constantes o variables.

Conjunto Fundamental de Soluciones. (CFS)

- Dos funciones y_1 y y_2 son linealmente independientes (**LI**) en un intervalo I si
  - *a)* $W[y_1, y_2](x) \neq 0$, $\forall x \in I$, donde $W[y_1, y_2](x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$ es el wronskiano de y_1 y y_2.
  - *b)* Los vectores $\begin{pmatrix} y_1(x_0) \\ y_1'(x_0) \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} y_2(x_0) \\ y_2'(x_0) \end{pmatrix}$ son **LI** para cada $x_0 \in I$.
- $S = \{y_1(x), y_2(x)\}$ es un CFS de $L_1[y] = 0$ ó $L_2[y] = 0$ si
  - *a)* y_1 y y_2 son (**LI**), y
  - *b)* $L_1(c_1y_1 + c_2y_2) = 0$ ó $L_2(c_1y_1 + c_2y_2) = 0$
- La solución general de $L_1[y] = 0$ ó $L_2[y] = 0$ en I está dada por

  $$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x),$$

  donde c_1 y c_2 son constantes.

Teorema 2. Si y es una función k-veces diferenciable, entonces

$$e^{-ax}(D - a)^k[y] = D^k[e^{-ax}y]$$

Reducción de orden.

- Si $y_1 \neq 0$ es una solución conocida de $L_2[y] = 0$ donde $L_2 := D^2 + pD + q$, entonces una segunda solución **LI** y_2 se obtiene de la siguiente manera:

  Paso 1. Se busca una segunda solución de la forma $\boxed{y_2 = y_1 u}$.

  Paso 2. Después de sustituir en $L_2[y] = 0$, se hace la sustitución $\boxed{u' = w}$ para reducir el orden. Finalmente,

  Paso 3. Se resuelve $w' + \left(\dfrac{2y_1'}{y_1} + p\right) w = 0$ y se regresa hasta el paso 1.

- Si $y_1 \neq 0$ es una solución conocida de $L_2[y] = 0$, donde $L_2 := D^2 + pD + q$ entonces una solución particular y_p de $L_2[y] = f(x)$ se obtiene de la siguiente manera:

  Paso 1. Se busca una solución particular de la forma $\boxed{y_p = y_1 u}$.

  Paso 2. Después de sustituir en $L_2[y] = f(x)$, se hace la sustitución $\boxed{u' = w}$ para reducir el orden. Finalmente,

  Paso 3. Se resuelve $w' + \left(\dfrac{2y_1'}{y_1} + p\right) w = \dfrac{f(x)}{y_1}$ y se regresa hasta el paso 1.

- Si $\dfrac{d^2y}{dx^2} = f(x, y')$, es decir, no aparece la variable dependiente y, entonces la sustitución $u = y'$, con $u = g(x)$ la reduce a una ecuación diferencial de primer orden: $\dfrac{du}{dx} = f(x, u)$.

- Si $\dfrac{d^2y}{dx^2} = f(y, y')$, es decir, no aparece la variable independiente x, entonces la sustitución $z = y'$, con $z = h(y)$ la reduce a una ecuación diferencial de primer orden: $z\dfrac{dz}{dy} = f(y, z)$.

Ecuaciones diferenciales de orden superior.

Ecuación diferencial lineal.

Una EDOL de orden n es una expresión que tiene una de las siguientes formas equivalentes:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0 y = g(x) \tag{19a}$$

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \tag{19b}$$

Operadores diferenciales.

Haciendo $D[y] = \dfrac{dy}{dx} = y', , D^2[y] = \dfrac{d^2y}{dx^2} = y'', \ldots, D^n[y] = \dfrac{d^ny}{dx^n} = y^{(n)}$, las ecuaciones (19a) y (19b) se pueden escribir como

$$L_1[y] = (a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1D + a_0)[y] = g(x) \tag{20a}$$

$$L_2[y] = (D^2 + p_1D^{n-1} + \cdots p_{n-1}D + p_n)[y] = f(x). \tag{20b}$$

$L_1 := a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1D + a_0$ y $L_2 := D^2 + p_1D^{n-1} + \cdots p_{n-1}D + p_n$ se llaman operadores diferenciales de orden n, los cuales son transformaciones lineales.

Conjunto Fundamental de Soluciones. (CFS)

- Las n funciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son **LI** en un intervalo I si

  a) $W[y_1, y_2, \ldots, y_n](x) \neq 0$, $\forall x \in I$, donde

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_n](x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

  es el wronskiano de $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

  b) Los vectores $\begin{pmatrix} y_1(x_0) \\ y_1'(x_0) \\ \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2(x_0) \\ y_2'(x_0) \\ \vdots \\ y_2^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} y_n(x_0) \\ y_n'(x_0) \\ \vdots \\ y_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}$ son **LI** para cada $x_0 \in I$.

- $S = \{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$ es un CFS de $L_1[y] = 0$ o $L_2[y] = 0$ si

  a) $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son linealmente independientes (**LI**), y

  b) $L_1(c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n) = 0$ o $L_2(c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n) = 0$

- La solución general de $L_1[y] = 0$ o $L_2[y] = 0$ en I está dada por

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n, \quad \text{donde } c_1, c_2, \ldots, c_n \text{ son constantes.}$$

EDOL homogénea con coeficientes constantes.

Sea la ecuación diferencial $L[y] = 0$, donde $L := P(D) = a_nD^n + \cdots + a_1D + a_0$ con $a_0, a_1, \ldots, a_n$ constantes reales.

Se buscan soluciones de la forma $y = e^{rx}$, donde r es una constante por determinar. Se reemplaza en $L[y] = 0$ y se obtiene la ecuación auxiliar

$$p(r) = a_nr^n + \cdots + a_1r + a_0 = 0.$$

Se consideran varios casos para las raíces del polinomio $p(r)$.

- Raíces reales distintas: $r_1, r_2, \ldots, r_n$; $r_i \neq r_j$ para $i \neq j$. Un **CFS** para $P(D)[y] = 0$ está formado por las funciones

$$y_1 = e^{r_1x}, y_2 = e^{r_2x}, \ldots, y_n = e^{r_nx}.$$

- Ráices reales repetidas: $r = r_1$ es una raíz real de multiplicidad k, $1 \leq k \leq n$. Un **CFS** para la ecuación $(D - r_1)^k[y] = 0$ está formado por las funciones

$$y_1 = e^{r_1x}, y_2 = xe^{r_1x}, \ldots, y_k = x^{k-1}e^{r_1x}.$$

- Raíces complejas simples: $r = \alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ es una raíz de $p(r)$. También lo es la conjugada $\overline{r} = \alpha - \beta i$. Un **CFS** correspondiente a la ecuación $((D - \alpha)^2 + \beta^2)[y] = 0$ está formado por las funciones

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x), \; y_2 = e^{\alpha x}\,\mathrm{sen}\,(\beta x).$$

- Raíces complejas repetidas: $r = \alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ es una raíz de multiplicidad k de $p(r)$. También lo es la conjugada $\overline{r} = \alpha - \beta i$. Un **CFS** correspondiente a la ecuación $((D-\alpha)^2 + \beta^2)^k[y] = 0$ está conformado por las funciones

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x),\ y_2 = xe^{\alpha x}\cos(\beta x), \ldots, y_k = x^{k-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x)$$
$$y_{k+1} = e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x),\ y_{k+2} = xe^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x), \ldots, y_{2k} = x^{k-1}e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$$

EDOL no homogénea $L[y] = g(x)$ o $L[y] = f(x)$

Encontrar una solución particular para las ecuaciones equivalentes

$$L_1[y] = g(x) \tag{21a}$$
$$L_2[y] = f(x), \tag{21b}$$

donde $L_1 = a_n D^n + \cdots + a_1 D + a_0$ y $L_2 := D^n + p_1 D^{n-1} + \cdots + p_{n-1}D + p_n$. La solución general de (21a) o (21b) es de la forma

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x),$$

donde y_c es la solución general de $L[y] = 0$, llamada solución complementaria y y_p es una solución particular de (21a) o (21b).

Coeficientes indeterminados.

Consideramos la ecuación (21a) y $g(x)$ es un polinomio, exponencial, seno, coseno o combinaciones finitas de las anteriores mediante productos y sumas.

Tipo	$g(x)$	Forma de $y_p(x)$
I	$p_n(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$	$x^k P_n(x) = x^k(A_n x^n + \cdots + A_1 x + A_0)$
II	$ce^{\gamma x}$	$x^k A e^{\gamma x}$
III	$a\cos(\omega x) + b\operatorname{sen}(\omega x)$	$x^k(A\cos(\omega x) + B\operatorname{sen}(\omega x))$
IV	$p_n(x)e^{\gamma x}$	$x^k P_n(x)e^{\gamma x}$
V	$p_n(x)\cos(\omega x) + q_m(x)\operatorname{sen}(\omega x)$	$x^k[P_N(x)\cos(\omega x) + Q_N(x)\operatorname{sen}(\omega x)]$, con $N = \max\{n, m\}$
VI	$e^{\gamma x}[a\cos\omega x + b\operatorname{sen}\omega x]$	$x^k e^{\gamma x}[A\cos\omega x + B\operatorname{sen}\omega x]$
VII	$e^{\gamma x}[p_n(x)\cos(\omega x) + q_m(x)\operatorname{sen}(\omega x)]$	$x^k e^{\gamma x}[P_N(x)\cos(\omega x) + Q_N(x)\operatorname{sen}(\omega x)]$, $N = \max\{n, m\}$

Nota: k es el menor entero no negativo tal que ninguna parte de y_p es solución de $L[y] = 0$.

Operadores anuladores.

Consideramos la ecuación (21a) y $g(x)$ es un polinomio, exponencial, seno, coseno o combinaciones finitas de las anteriores mediante productos y sumas.

Tipo	$g(x)$	Operador anulador $Q(D)$
I	$p_n(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$	D^{n+1}
II	$ce^{\gamma x}$	$D - \gamma$
III	$a\cos(\omega x) + b\operatorname{sen}(\omega x)$	$D^2 + \omega^2$
IV	$p_n(x)e^{\gamma x}$	$(D-\gamma)^{n+1}$
V	$p_n(x)\cos(\omega x) + q_m(x)\operatorname{sen}(\omega x)$	$(D+\omega^2)^{N+1}$, $N = \max\{n, m\}$
VI	$e^{\gamma x}[c\cos\omega x + d\operatorname{sen}\omega x]$	$(D-\gamma)^2 + \omega^2$
VII	$e^{\gamma x}[p_n(x)\cos(\omega x) + q_m(x)\operatorname{sen}(\omega x)]$	$[(D-\gamma)^2 + \omega^2]^{N+1}$, $N = \max\{n, m\}$

Variación de los parámetros.

Se busca una solución particular para la ecuación (21b) en la forma

$$y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2 + \cdots + v_n y_n = \langle \mathbf{v}, \mathbf{y} \rangle,$$

donde $S = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ es un **CFS** para $L_2[y] = 0$.

Para determinar $v_1, v_2, \ldots, v_n$ primero debemos resolver el sistema en términos de $v_1', v_2', \ldots, v_n'$.

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{v}', \boldsymbol{y} \rangle &= v_1' y_1 + v_2' y_2 + \cdots + v_n' y_n = 0 \\
\langle \boldsymbol{v}', \boldsymbol{y} \rangle &= v_1' y_1' + v_2' y_2' + \cdots + v_n' y_n' = 0 \\
&\vdots \\
\langle \boldsymbol{v}', \boldsymbol{y}^{(n-2)} \rangle &= v_1' y_1^{(n-2)} + v_2' y_2^{(n-2)} + \cdots + v_n' y_n^{(n-2)} = 0 \\
\langle \boldsymbol{v}', \boldsymbol{y}^{(n-1)} \rangle &= v_1' y_1^{(n-1)} + v_2' y_2^{(n-1)} + \cdots + v_n' y_n^{(n-1)} = f(x)
\end{aligned}$$

Después de un manejo algebraico de la regla de Cramer se obtiene

$$v_1' = \frac{W_1}{W},\ v_2' = \frac{W_2}{W},\ \ldots,\ v_n' = \frac{W_n}{W},$$

donde W es el wronskiano de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ y W_j es el determinante que se obtiene al reemplazar la columna $j-$ésima de la matriz del sistema por la columna de la derecha $(0, 0, \ldots, 0, f(x))$. Al integrar estas ecuaciones se obtiene

$$v_1 = \int \frac{W_1}{W} dx,\ v_2 = \int \frac{W_2}{W} dx,\ \ldots,\ v_n = \int \frac{W_n}{W} dx.$$

Para $n = 2$, las ecuaciones anteriores se reducen a $v_1 = \int \frac{-y_2 f(x)}{W}\, dx, \quad v_2 = \int \frac{y_1 f(x)}{W}\, dx.$

Ecuación de Cauchy–Euler.

Es de la forma

$$L_1[y] = g(x) \tag{22}$$

donde $L_1 := a_n x^n D^n + a_{n-1} x^{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 x D + a_0$ y $a_0,\ a_1, \ldots, a_n$ son constantes.

Primero se debe encontrar la solución complementaria y_c para $L_1[y] = 0$ en el intervalo $(0, \infty)$ o $(-\infty, 0)$. Se buscan soluciones de la forma $y = x^r$, donde r es una constante por determinar. Se reemplaza en $L_1[y] = 0$ y se obtiene la ecuación auxiliar

$$q(r) = a_n r(r-1)\cdots(r-n+1) + a_{n-1} r(r-1)\cdots(r-n+2) + \cdots + a_1 r + a_0 = 0.$$

- Raíces reales distintas: $r_1, r_2, \ldots, r_n$; $r_i \neq r_j$ para $i \neq j$. Un **CFS** para $L_[y] = 0$ está formado por las funciones
$$y_1 = x^{r_1}, y_2 = x^{r_2}, \ldots, y_n = x^{r_n}.$$
- Ráices reales repetidas: $r = r_1$ es una raíz real de multiplicidad k, $1 \leq k \leq n$. Un **CFS** para correspondiente a dicha raíz está formado por las funciones
$$y_1 = x^{r_1}, y_2 = x^{r_1} \ln x, \ldots, y_k = x^{r_1} \ln^{k-1} x.$$
- Raíces complejas simples: $r = \alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ es una raíz de $q(r)$. También lo es la conjugada $\overline{r} = \alpha - \beta i$. Un **CFS** correspondiente a dicha raíz está formado por las funciones
$$y_1 = x^\alpha \cos(\beta \ln x),\ y_2 = x^\alpha \operatorname{sen}(\beta \ln x).$$
- Raíces complejas repetidas: $r = \alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ es una raíz de multiplicidad k de $q(r)$. También lo es la conjugada $\overline{r} = \alpha - \beta i$. Un **CFS** correspondiente a dihca raíz está conformado por las funciones
$$\begin{aligned}
y_1 &= x^\alpha \cos(\beta \ln x),\ y_2 = x^\alpha \ln x \cos(\beta \ln x), \ldots, y_k = x^\alpha \ln^{k-1} x \cos(\beta \ln x) \\
y_{k+1} &= x^\alpha \operatorname{sen}(\beta \ln x),\ y_{k+2} = x^\alpha \ln x \operatorname{sen}(\beta \ln x), \ldots, y_{2k} = x^\alpha \ln^{k-1} x \operatorname{sen}(\beta \ln x)
\end{aligned}$$

Capítulo 4. Transformada de $\mathscr{L}$aplace

Definición 1. Para f definida para $t > 0$, la transfromada de Laplace de $f(t)$ es

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt = F(s),$$

si la integral impropia existe.

Función gamma

Para $\alpha > 0$, la función gamma se define como

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt.$$

Algunas propiedades de la función gamma son.

a) $\Gamma(n+1) = n!;\ n = 0, 1, \ldots$ *b)* $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ *c)* $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

Lista básica de transformadas

	$f(t)$	$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$			$f(t)$	$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$
1.	$t^{\alpha},\ \alpha > -1$	$\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$		4.	$\cos bt$	$\dfrac{s}{s^2+b^2}$
2.	e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$		5.	$\operatorname{senh} bt$	$\dfrac{b}{s^2-b^2}$
3.	$\operatorname{sen} bt$	$\dfrac{b}{s^2+b^2}$		6.	$\cosh bt$	$\dfrac{s}{s^2-b^2}$

Algunas propiedades

Si $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$, $\mathscr{L}\{g(t)\} = G(s)$, a y b son constantes, entonces

1. **Linealidad:** $\mathscr{L}\{af(t) + bf(t)\} = aF(s) + bG(s)$
2. **Cambio de escala:** $\mathscr{L}\{f(at)\} = \dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{s}{a}\right)$
3. **Transformada de una derivada:**

$$\mathscr{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

   Nota: Si $f^{(k)}(0)$ no está definida, se tomará $\lim\limits_{t\to 0^+} f^{(k)}(0),\ k = 0, 1, \ldots, n-1.$

4. **Comportamiento final:** $\lim\limits_{s\to\infty} F(s) = 0.$
5. **Teorema del valor inicial:** $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = \lim\limits_{s\to\infty} sF(s).$
6. **Teorema del valor final:** $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = \lim\limits_{s\to 0^+} sF(s).$
7. **Transformada de una integral:**

   a) $\mathscr{L}\left\{\displaystyle\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right\} = \dfrac{F(s)}{s}$ *b)* $\mathscr{L}\left\{\displaystyle\int_0^t\int_0^u f(\tau)\,d\tau\,du\right\} = \dfrac{F(s)}{s^2}$

8. **Multiplicación por t^n o derivada de una transformada**

   $\mathscr{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \dfrac{d^n F(s)}{ds^n} = (-1)^n F^{(n)}(s).$

9. **División por t^n:** Si $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{f(t)}{t}$ y $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{f(t)}{t^2}$ existen y son finitos,

   a) $\mathscr{L}\left\{\dfrac{f(t)}{t}\right\} = \displaystyle\int_s^\infty F(u)\,du$ *b)* $\mathscr{L}\left\{\dfrac{f(t)}{t^2}\right\} = \displaystyle\int_s^\infty\int_u^\infty F(v)\,dvdu$

10. Si $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{f(t)}{t}$ existe

$$\int_0^t \frac{f(t)}{t}\,dt = \int_0^\infty F(s)\,ds$$

11. Si $\mathscr{L}\{g(t,u)\} = G(s,u)$ y $f(t) = \displaystyle\int_0^\infty g(t,u)\,du$, entonces $\mathscr{L}\{f(t)\} = \displaystyle\int_0^\infty G(s,u)\,du$

Existencia de la transformada

Definición 2 (Continuidad seccional o por partes)**.** Se dice que una función es seccionalmente continua o continua por partes en un intervalo $[a,b]$ si es posible dividirlo en un número finito de subintervalos $[t_0,t_1],\ldots,[t_{n-1},t_n]$ con $t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n$, donde $a = t_0$ y $b = t_n$, de tal manera que la función sea continua en (t_{k-1},t_k) y son finitos los límites laterales $\lim\limits_{t\to t_k^-} f(t) = f(t_k-)$ y $\lim\limits_{t\to t_k^+} f(t) = f(t_k+)$. Una función es continua por partes en $[0,\infty)$, si lo es en cada intervalo $[0,N]$ con $N > 0$.

Definición 3 (Funciones de orden exponencial)**.** Se dice que una función $f(t)$ es de orden exponencial c, si existen constantes positivas c, M y T tales que

$$|f(t)| \leq Me^{ct} \quad \text{para todo } t > T.$$

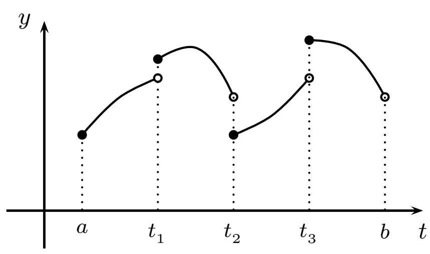


Figura 1: Continuidad a trozos

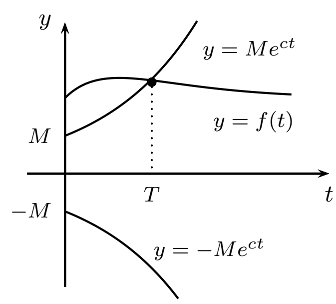


Figura 2: Orden exponencial

Teorema 3 (Condiciones suficientes para la existencia de la transformada de Laplace)**.** Si $f(t)$ es seccionalmente continua en el intervalo $[0,\infty)$ y de orden exponencial c para todo $t > T$, entonces existe la transformada de Laplace de $f(t)$ para todo $s > c$.

Transformada inversa

Si la transformada de Laplace de una función $f(t)$ es $F(s)$, entonces $F(s)$ es la transformada inversa de $f(t)$; es decir, $f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$.

Lista básica de transformadas inversas

	$F(s)$	$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$			$F(s)$	$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$
1.	$\dfrac{1}{s^{\alpha+1}}$	$\dfrac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}$		4.	$\dfrac{s}{s^2+b^2}$	$\cos bt$
2.	$\dfrac{1}{s-a}$	e^{at}		5.	$\dfrac{1}{s^2-b^2}$	$\dfrac{1}{b}\operatorname{senh} bt$
3.	$\dfrac{1}{s^2+b^2}$	$\dfrac{1}{b}\operatorname{sen} bt$		6.	$\dfrac{s}{s^2-b^2}$	$\cosh bt$

Teorema 4 (Primer Teorema de traslación). Si $F(s) = \mathscr{L}\{F(t)\}$ y $a \in \mathbb{R}$, entonces

a) $\mathscr{L}\{e^{-at}f(t)\} = F(s-a) = F(s)\big|_{s\to s-a}$

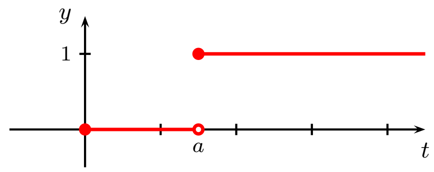
b) $\mathscr{L}^{-1}\left\{F(s)\big|_{s\to s-a}\right\} = e^{-at}f(t)$

Nota: $F(s)\big|_{s\to s-a}$ significa que se reemplaza s por $s-a$ en $F(s)$.

Función escalón unitario

Para $a \geq 0$, la función escalón unitario se define como

$$\mathcal{U}_a(t) = \mathcal{U}(t-a) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq t < a \\ 1, & \text{si } t \geq a \end{cases}$$



Teorema 5 (Segundo teorema de traslación)**.** Si $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$ y $a \geq 0$, entonces

a) $\mathscr{L}\{f(t-a)\mathcal{U}(t-a)\} = e^{-as}F(s)$

b) $\mathscr{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)\mathcal{U}(t-a)$

Forma alternativa.

Si $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$, entonces $\mathscr{L}\{f(t)\mathcal{U}(t-a)\} = e^{-as}\mathscr{L}\{f(t+a)\}$

Convolución.

Si $f(t)$ y $g(t)$ son funciones secionalmente continuas en $[0,\infty)$, la convolución entre f y g, denotada por $f * g$ es

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$$

Propiedades

1. $f * g = g * f$
2. $f * (g+h) = f * g + f * h$
3. $(f * g) * h = f * (g * h)$
4. $f * 0 = 0$

Teorema 6 (Teorema de convolución)**.** Si $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$ y $G(s) = \mathscr{L}\{g(t)\}$, entonces

a) $\mathscr{L}\{(f * g)(t)\} = F(s)G(s)$

b) $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = (f * g)(t)$

Funciones periódicas

Definición 4. Una función $f(t)$ es periódica con periodo $T > 0$ si

$$f(t \pm T) = f(t),$$

para todo t en el dominio de f.

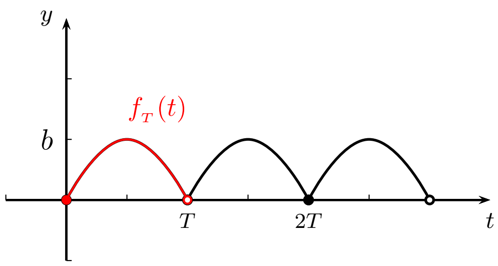


Figura 3: Función periódica $f(t)$

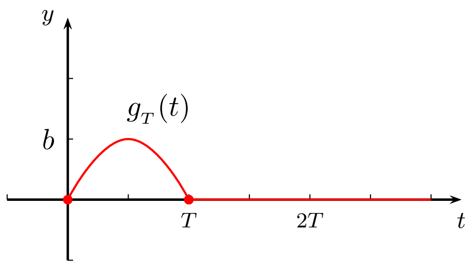


Figura 4: Función $g_T(t)$

Teorema 7. Si $f(t)$ es periódica con periodo T, es continua por partes en $[0, \infty)$ y de orden exponencial, entonces

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \frac{G_T(s)}{1 - e^{-Ts}},$$

donde $g_T(t) = \begin{cases} f(t), & \text{si } 0 \le t < T \\ 0, & \text{si } t \ge T \end{cases}$ y $G_T(s) = \mathscr{L}\{g_T(t)\} = \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt.$

Función impulso unitario y función delta de Dirac

Definición 5 (Función impulso unitario)**.** Para $a > 0$ y $t_0 > 0$, la función impulso unitario se define como

$$\delta_a(t - t_0) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \le t < t_0 - a \\ \dfrac{1}{2a}, & \text{si } t_0 \le t < t_0 + a \\ 0, & \text{si } t \ge t_0 + a \end{cases}$$

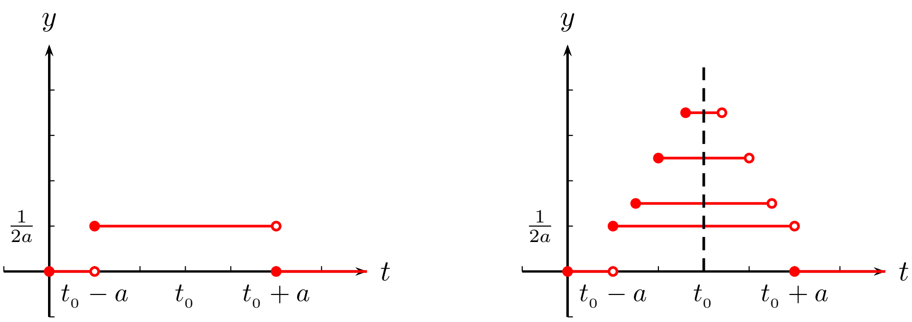


Figura 5: Función impulso unitario $\delta_a(t - t_0)$ y comportamiento para $a \to 0$

Definición 6 (Función delta de Dirac)**.** Función límite, denotada por $\delta(t - t_0)$, aproximada por $\delta_a(t - t_0)$ cuando $a \to 0$. Es decir

$$\delta(t - t_0) = \lim_{a \to 0} \delta_a(t - t_0).$$

Esta última expresión se puede caracterizar por las condiciones:

1. $\delta(t-t_0) = \begin{cases} \infty, & \text{si } t = t_0 \\ 0, & \text{si } t \neq t_0 \end{cases}$
2. $\displaystyle\int_0^\infty \delta(t-t_0)dt = 1.$

Además satisface la propiedad (propiedad cernidora)

3. $\displaystyle\int_0^\infty \delta(t-t_0)f(t_0)dt = f(t_0)$, para cualquier función continua f definida en $[0,\infty)$.

Transformadas de la función impulso unitario y función delta de Dirac

1. $\mathscr{L}\{\delta_a(t-t_0)\} = \dfrac{e^{st_0}(e^{as}-e^{-as})}{2as}$
2. $\mathscr{L}\{\delta(t-t_0)\} = e^{-st_0}$

	Función	Transformada		Función	Transformada
1.	t^α	$\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}},\ \alpha > -1$	9.	$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
2.	e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$	10.	$\mathcal{U}(t-a)$	$\dfrac{e^{-as}}{s}$
3.	$\operatorname{sen} bt$	$\dfrac{b}{s^2+b^2}$	11.	$f(t-a)\mathcal{U}(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
4.	$\cos bt$	$\dfrac{s}{s^2+b^2}$	12.	$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
5.	$\operatorname{senh} bt$	$\dfrac{b}{s^2-b^2}$	13.	$\dfrac{f(t)}{t^n}$	$\displaystyle\int_s^\infty \cdots \int_s^\infty F(u)\,du^n$
6.	$\cosh bt$	$\dfrac{s}{s^2-b^2}$	14.	$(f*g)(t)$	$F(s)G(s)$
7.	$\displaystyle\int_0^t f(\tau)\,d\tau$	$\dfrac{F(s)}{s}$	15.	Periódica $f(t)$	$\dfrac{\int_0^T e^{-st}f(t)\,dt}{1-e^{-Ts}}$
8.	$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s) - s^{n-1}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$	16.	$\delta(t-t_0)$	$e^{-t_0 s}$

Tabla 1: Lista ampliada de transformadas

Capítulo 5. Sistemas de ecuaciones diferenciales

Teoría preliminar

Definición 7. Un sistema lineal de ecuaciones diferenciales es un sistema de la forma

$$\begin{array}{rcl} P_{11}(D)x_1 + P_{12}(D)x_2 + \cdots + P_{1n}(D)x_n &=& b_1(t) \\ P_{21}(D)x_1 + P_{22}(D)x_2 + \cdots + P_{2n}(D)x_n &=& b_2(t) \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \ddots \qquad \vdots && \vdots \\ P_{n1}(D)x_1 + P_{n2}(D)x_2 + \cdots + P_{nn}(D)x_n &=& b_n(t), \end{array} \tag{23}$$

en donde los P_{ij} son polinomios de diversos grados en el operador diferencial D.

Definición 8. Un sistema lineal de ecuaciones diferenciales de primer orden es de la forma

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t)\\
\frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t)\\
\vdots \quad & \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \ddots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots\\
\frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \ldots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t)
\end{aligned} \tag{24}$$

Si todos los coeficientes de P_{ij} en (23) o los coeficientes a_{ij} en (24) son constantes, entonces (23) o (24) es un sistema lineal con coeficientes constantes. Un sistema que no tenga ninguna de las formas (23) o (24) se dice que es no lineal.

En general, un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden en forma normal es un sistema de la forma

$$\begin{aligned}
x_1'(t) &= \; g_1(t, x_1, x_1, \ldots, x_n)\\
x_2'(t) &= \; g_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)\\
\vdots \quad & \quad \vdots\\
x_n'(t) &= \; g_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)
\end{aligned} \tag{25}$$

Forma matricial de un sistema lineal

El sistema (23) se puede escribir en la forma

$$P(D)\mathbf{x}(t) = \mathbf{b}(t)$$

donde

$$A(D) = \begin{pmatrix} P_{11}(D) & P_{12}(D) & \ldots & P_{1n}(D)\\ P_{21}(D) & P_{22}(D) & \ldots & P_{2n}(D)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ P_{n1}(D) & P_{n2}(D) & \ldots & P_{nn}(D) \end{pmatrix}, \; \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ \vdots\\ x_n(t) \end{pmatrix}, \; \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t)\\ b_2(t)\\ \vdots\\ b_n(t) \end{pmatrix}.$$

La forma matricial normal de (24) es

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x} + \mathbf{f}(t),$$

donde

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \ldots & a_{1n}(t)\\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \ldots & a_{2n}(t)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \ldots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \; \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ \vdots\\ x_n(t) \end{pmatrix}, \; \mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t)\\ f_2(t)\\ \vdots\\ f_n(t) \end{pmatrix}.$$

Definición 9. Una función vectorial es una solución de (23) o (24) en un intervalo I es cualquier matriz columna

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ \vdots\\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

cuyas componentes son funciones diferenciables que satisfacen al sistema en el intervalo I.

Definición 10 (Problema de Valor Inicial (PVI)). Sea t_0 un punto en un intervalo I y

$$\mathbf{x}(t_0) = \begin{pmatrix} x_1(t_0)\\ x_2(t_0)\\ \vdots\\ x_n(t_0) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} \gamma_1\\ \gamma_2\\ \vdots\\ \gamma_n \end{pmatrix},$$

donde $\gamma_1,\ \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ son constantes dadas. Entonces, el problema

$$\begin{aligned} &\text{Resolver} \ \ \mathbf{x}'(t) = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t) \\ &\text{Sujeto a} \ \ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{aligned} \tag{26}$$

es un **problema de valor inicial.**

Teorema 8 (Existencia y unicidad de soluciones). Si las componentes de $A(t)$ y $F(t)$ son funciones continuas en un intervalo común I que contiene al punto t_0, entonces existe una única solución del problema de valor inicial (26).

Teorema 9 (Principio de superposición). Si $\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ son soluciones del sistema homogéneo $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ en un intervalo I, entonces la combinación lineal

$$c_1\mathbf{x}_1 + c_1\mathbf{x}_2 + \cdots + c_k\mathbf{x}_k$$

en la que $c_1, c_2, \ldots, c_k$ son constantes arbitrarias también es una solución en el intervalo.

Definición 11 (Dependencia e independencia lineal). Sean $\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ un conjunto de vectores solución del sistema homogéneo $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ en un intervalo I. Se dice que el conjunto es **linealmente dependiente (LD)** en el intervalo si existen constantes $c_1,\ c_2, \ldots, c_n$, no todas cero tales que

$$c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n = 0$$

para todo t en el intervalo. Si el conjunto de vectores no es linealmente dependiente en I, entonces es linealmente independiente (LI).

Teorema 10. Sean

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix}$$

n vectores solución del sistema homogéneo $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ en un intervalo I. Entonces el conjunto de vectores es linealmente independientes en I si y sólo si el wronskiano de $\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$

$$W(\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n) = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

para todo t en el intervalo

Definición 12 (Conjunto fundamental de soluciones). Todo conjunto $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ de n vectores solución, linealmente independientes del sistema homogéneo $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ en un intervalo I es un conjunto fundamental de soluciones en el intervalo.

Definición 13 (Matriz fundamental). Si $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ es un conjunto fundamental de soluciones del sistema homogéneo $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, entonces a la matriz

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \ldots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \ldots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \ldots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

se le llama **matriz fundamental.**

Teorema 11. Existe un conjunto fundamental de soluciones para la ecuación $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ en un intervalo I.

Teorema 12. Sean $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ un conjunto fundamental de soluciones de $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ en un intervalo I. Entonces la solución general del sistema en el intervalo es

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n = \Phi(t)\mathbf{c},$$

donde $\mathbf{c} = \mathrm{col}(c_1, c_2, \ldots, c_n)$.

Teorema 13. Sea $\mathbf{x}_p$ una solución particular de $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{f}$ en un intervalo I y

$$\mathbf{x}_c = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n$$

la solución general en el mismo intervalo del sistema homogéneo asociado $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$. Entonces la solución general de $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{f}$ es

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_c$$

La solución $\mathbf{x}_c$ se denomina solución complementaria de $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{f}$.

Métodos de solución

Método de eliminación

Operaciones elementales

A continuación se describen las operaciones elementales que se pueden aplicar para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales en forma matricial $P(D)\mathbf{x} = \mathbf{b}$, usando eliminación sistemática

1 Intercambiar renglones: $\mathbf{f}_i \leftrightarrow \mathbf{f}_k$

2 "Multiplicar (operar)" un renglón $\mathbf{f}_i$ por $P(D)$: $\mathbf{f}_i \leftarrow P(D)\mathbf{f}_i$

3 Sumar a un renglón un "múltiplo" de otro: $\mathbf{f}_i \leftarrow \mathbf{f}_i + P(D)\mathbf{f}_k$

Solución mediante transformada de Laplace

La transformada de Laplace se puede usar para reducir ciertos sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con condiciones iniciales a un sistema algebraico, donde las incógnitas son ahora las transformadas de las funciones que conforman la solución. Al despejar estas incógnitas y calcular sus transformadas inversas de Laplace se obtiene la solución del problema con valores iniciales para el sistema.

Sistemas lineales homogéneos con coeficientes constantes

En esta sección se analiza un procedimiento para obtener una solución general para el sistema homogéneo

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) \tag{27}$$

donde A es una matriz constante (real) $n \times n$. La solución general estará definida para toda t en $(-\infty, \infty)$, pues los elementos de A son funciones constantes, que son continuas en dicho intervalo. De manera similar que para el caso de ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes estudiadas en la sección 4.3 en el cual se buscaban soluciones de la forma $e^{\lambda t}$, es de esperarse que el sistema (27) tenga soluciones de la forma

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{k},$$

donde λ es una constante y $\mathbf{k}$ es un vector constante, los cuales deben determinarse. Al sustituir la función vectorial $\mathbf{x}(t)$ y su derivada en (27) se tiene

$$\lambda e^{\lambda t}\mathbf{k} = Ae^{\lambda t}\mathbf{k} = e^{\lambda t}A\mathbf{k}.$$

Cancelando el factor $e^{\lambda t}$ y reagrupando términos se obtiene

$$(A - \lambda I)\mathbf{k} = 0. \tag{28}$$

Lo anterior muestra que $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{k}$ es una solución de (27) si y sólo si λ y $\mathbf{k}$ satisfacen la ecuación (28). Como el caso trivial $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ no sirve para hallar soluciones linealmente independientes de (27), se requiere que $\det(A - \lambda I) = 0$. Es decir, λ es un valor propio de A con vector propio asociado $\mathbf{k}$. De acuerdo con la teoría de sistemas de ecuaciones lineales estudiados en el curso de Álgebra Lineal, el sistema (28) tiene soluciones no triviales si y sólo si

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = |A - \lambda I| = 0. \tag{29}$$

A (29) se le llama ecuación auxiliar o característica de A y $p(\lambda)$ es el polinomio característico de A.

Caso 1. Valores propios reales distintos.

Cuando la matriz A de $n \times n$ tiene n valores reales y distintos; $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, siempre es posible hallar un conjunto de n vectores propios linealmente independientes, $\mathbf{k_1}, \mathbf{k_2}, \ldots, \mathbf{k_n}$, y

$$\left\{\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{k_1} + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{k_2} + \ldots + c_n e^{\lambda_n t}\mathbf{k_n}\right\}$$

es un conjunto fundamental de soluciones de (27) en $(-\infty, \infty)$.

Teorema 14. Suponga que la matriz constante A de $n \times n$ tiene los vectores propios linealmente independientes $\mathbf{k_1}, \mathbf{k_2}, \ldots, \mathbf{k_n}$. Sea λ_i el valor propio correspondiente a $\mathbf{k_i}$. Entonces $\left\{\mathbf{x}_1 = e^{\lambda_1 t}\mathbf{k}_1, \mathbf{x}_2 = e^{\lambda_2 t}\mathbf{k}_2, \ldots, \mathbf{x}_n = e^{\lambda_n t}\mathbf{k}_n\right\}$ es un conjunto fundamental de soluciones en $(-\infty, \infty)$ para el sistema homogéneo $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$. Por lo tanto, la solución general de $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ es

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{k_1} + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{k_2} + \ldots + c_n e^{\lambda_n t}\mathbf{k_n}$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son constantes arbitrarias.

Caso 2. Valores propios reales repetidos.

En este caso, $(\lambda - \lambda_1)^m$, es un factor de $p(\lambda)$, $m = \mathrm{m}_a(\lambda_1) > 1$. Puede suceder

i. La multiplicidad geométrica de λ_1 es $\mathrm{m}_g(\lambda_1) = m = \mathrm{m}_a(\lambda_1)$. Es decir, λ_1 tiene asociados exactamente m vectores linealmente independientes

ii. La multiplicidad geométrica de λ_1 es $r < m = \mathrm{m}_a(\lambda_1)$.

Caso i. $\mathrm{m}_g(\lambda_1) = \mathrm{m}_a(\lambda_1)$. Esto siginifica que $E_{\lambda_1} = \mathrm{gen}\{\mathbf{k_1}, \mathbf{k_2}, \ldots, \mathbf{k_m}\}$. En este caso se tienen las m soluciones LI para (27)

$$\mathbf{x}_1 = e^{\lambda_1 t}\mathbf{k}_1, \mathbf{x}_2 = e^{\lambda_1 t}\mathbf{k}_2, \ldots, \mathbf{x}_m = e^{\lambda_1 t}\mathbf{k}_m$$

Caso ii. $\mathrm{m}_g(\lambda_1) = r$, $1 \leq r < m$. Es decir, $E_{\lambda_1} = \mathrm{gen}\{\mathbf{k_1}, \mathbf{k_2}, \ldots, \mathbf{k_r}\}$. Sólo hay r soluciones LI

$$\mathbf{x}_1 = e^{\lambda_1 t}\mathbf{k}_1, \mathbf{x}_2 = e^{\lambda_1 t}\mathbf{k}_2, \ldots, \mathbf{x}_r = e^{\lambda_1 t}\mathbf{k}_r$$

• $r = 1$, es decir, sólo hay un vector propio asociado $\mathbf{k}_{11}$. En este caso, siempre es posible hallar m soluciones linealmente independientes de la forma

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1 &= e^{\lambda_1 t}\mathbf{k}_{11}\\
\mathbf{x}_2 &= te^{\lambda_1 t}\mathbf{k}_{21} + e^{\lambda_1 t}\mathbf{k}_{22}\\
\vdots \quad & \quad \vdots\\
\mathbf{x}_m &= \frac{1}{(m-1)!}t^{m-1}e^{\lambda_1 t}\mathbf{k}_{m1} + \frac{1}{(m-2)!}t^{m-2}e^{\lambda_1 t}\mathbf{k}_{m2} + \cdots + e^{\lambda_1 t}\mathbf{k}_{mm}
\end{aligned}$$

Para obtener los vectores $\mathbf{k}_{mj}$ se sustituyen en (27) y luego se simplifica. Por ejemplo, para hallar $\mathbf{x}_2$ se procede de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_2' &= A\mathbf{x}_2\\
e^{\lambda_1 t}\mathbf{k}_{21} + \lambda_1 te^{\lambda_1 t}\mathbf{k}_{21} + \lambda_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{k}_{22} &= A(te^{\lambda_1 t}\mathbf{k}_{21} + e^{\lambda_1 t}\mathbf{k}_{22})\\
e^{\lambda_1 t}\left(\mathbf{k}_{21} + \lambda_1 t\mathbf{k}_{21} + \lambda_1 \mathbf{k}_{22}\right) &= e^{\lambda_1 t}A(t\mathbf{k}_{21} + \mathbf{k}_{22})
\end{aligned}$$

Al cancelar el factor común $e^{\lambda_1 t}$ y reacomodar se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{21} + \lambda_1 t\mathbf{k}_{21} + \lambda_1 \mathbf{k}_{22} &= A(t\mathbf{k}_{21} + \mathbf{k}_{22}) \\ t(A-\lambda_1 I)\mathbf{k}_{21} + (A-\lambda_1 I)\mathbf{k}_{22} &= \mathbf{k}_{21} \end{aligned}$$

Esta última igualdad se mantiene si y sólo si

$$(A-\lambda_1 I)\mathbf{k}_{21} = 0 \tag{i}$$
$$(A-\lambda_1 I)\mathbf{k}_{22} = \mathbf{k}_{21} \tag{ii}$$

Es decir, $\mathbf{k}_{21}$ es un valor propio de A y $\mathbf{k}_{22}$ se obtiene resolviendo (ii) una vez hallado $\mathbf{k}_{21}$ en (i). En este punto es conveniente elegir $\mathbf{k}_{21} = \mathbf{k}_{11}$. Observe que al multiplicar por $(A-\lambda_1 I)$ en (ii) se obtiene

$$(A-\lambda_1 I)^2\mathbf{k}_{22} = 0$$

Para hallar los demás vectores $\mathbf{k}_{mj}$ se continúa el proceso y se deben resolver

$$\begin{aligned} (A-\lambda_1 I)\mathbf{k}_{m1} &= 0 \\ (A-\lambda_1 I)\mathbf{k}_{m2} &= \mathbf{k}_{m1} \\ (A-\lambda_1 I)\mathbf{k}_{m3} &= \mathbf{k}_{m2} \\ \vdots \quad &= \vdots \\ (A-\lambda_1 I)\mathbf{k}_{m-1,m} &= \mathbf{k}_{mm} \end{aligned}$$

con $\mathbf{k}_{m1} = \mathbf{k}_{11}$.

• Hay más de un vector propio asociado: Consideremos $m = 3$ y $r = 2$. En este caso se tienen dos soluciones LI

$$\mathbf{x}_1 = e^{\lambda_1 t}\mathbf{k}_1,\ \mathbf{x}_2 = e^{\lambda_1 t}\mathbf{k}_2,$$

donde $\mathbf{k}_1$ y $\mathbf{k}_2$ se hallan resolviendo el sistema

$$(A-\lambda_1 I)\mathbf{k} = 0$$

Una tercera solución LI se busca de la forma

$$\mathbf{x}_3 = te^{\lambda_1 t}(a\mathbf{k}_1 + b\mathbf{k}_2) + e^{\lambda_1 t}\mathbf{k}_3,$$

donde a y b son constantes adecuadas que se deben elegir y $\mathbf{k}_3$ se encuentra resolviendo

$$(A-\lambda_1 I)\mathbf{k}_3 = a\mathbf{k}_1 + b\mathbf{k}_2$$

Caso 3. Valores propios complejos.

Suponga que $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ es una raíz compleja de la ecuación característica. Entonces también lo es su conjugada $\lambda_2 = \overline{\lambda}_1 = \alpha - \beta i$ ya que $p(\lambda)$ tiene coeficientes reales. Para este par de raíces complejas se tiene el par de soluciones complejas

$$\mathbf{z}_1 = e^{\lambda_1 t}\mathbf{w}_1,\ \mathbf{z}_2 = e^{\lambda_1 t}\mathbf{w}_2,$$

donde $\mathbf{w}_1$ y $\mathbf{w}_2 = \overline{\mathbf{w}}_1$ son vectores propios complejos asociados a λ_1 y λ_2 respectivamente.
Escribiendo

$$\mathbf{z} = \mathbf{x}_1 + i\mathbf{x}_2,\ \mathbf{w}_1 = \mathbf{b}_1 + i\mathbf{b}_2,$$

y después de algunos cálculos (los cuales se dejan para el lector), como se hizo para el caso de raíces complejas en ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden con coeficientes constantes, se llega a que las soluciones reales $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ son

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= e^{\alpha t}[\mathbf{b}_1 \cos\beta t - \mathbf{b}_2 \operatorname{sen}\beta t] \\ \mathbf{x}_2 &= e^{\alpha t}[\mathbf{b}_1 \operatorname{sen}\beta t + \mathbf{b}_2 \cos\beta t] \end{aligned}$$

Sistemas lineales no homogéneos

En esta sección se estudian los métodos de coeficientes indeterminados y variación de los parámetros para encontrar soluciones particulares del sistema no homogéneo $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{f}$.

Coeficientes indeterminados

El método de coeficientes indeterminados se puede usar para hallar una solución particular del sistema lineal no homogéneo $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{f}$ cuando A es una matriz $n \times n$ constante y las entradas de $\mathbf{f}(t)$ son polinomios, funciones exponenciales, senos y cosenos, o sumas y productos finitos de estas funciones.

Variación de los parámetros

Mediante una idea similar a la empleada en el caso de ecuaciones ordinarias de orden n, en donde se propone una solución particular de la forma

$$x_p(t) = v_1 x_1 + v_2 x_2 + \cdots + v_n x_n$$

se puede extender el método de variación de los parámetros a los sistemas.

Sea $\Phi(t)$ una matriz fundamental para el sistema homogéneo

$$\mathbf{x}'(t) = A(t)\mathbf{x}(t). \tag{30}$$

en donde ahora, las entradas de A pueden ser funciones continuas de t cualesquiera. Como una solución general de (30) está dada por $\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{c}$, donde $\mathbf{c}$ es un vector constante $n \times 1$, se busca una solución particular del sistema no homogéneo

$$\mathbf{x}'(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t) \tag{31}$$

en la forma

$$\mathbf{x}_p(t) = \Phi(t)\mathbf{v}(t), \tag{32}$$

donde $\mathbf{v}(t) = \mathrm{col}(v_1(t), v_2(t), \ldots, v_n(t))$ es una función vectorial por determinarse.

Para deducir una fórmula para $\mathbf{v}(t)$, primero se deriva (32) mediante la versión matricial de la regla del producto para obtener

$$\mathbf{x}_p' = \Phi(t)\mathbf{v}'(t) + \Phi'(t)\mathbf{v}(t).$$

Al sustituir las expresiones para $\mathbf{x}_p$ y $\mathbf{x}_p'$ en (31) se llega a

$$\Phi(t)\mathbf{v}'(t) + \Phi'(t)\mathbf{v}(t) = A\Phi(t)\mathbf{v}(t) + \mathbf{f}(t). \tag{33}$$

Como $\Phi(t)$ satisface la ecuación matricial $\Phi' = A\Phi$, la ecuación (33) se transforma en $\Phi\mathbf{v}' = \mathbf{f}$.

Multiplicando ambos lados de la última ecuación por $\Phi^{-1}(t)$ (que existe pues las columnas de $\Phi(t)$ son linealmente independientes) se obtiene

$$\mathbf{v}' = \Phi^{-1}\mathbf{f}.$$

Al integrar se tiene

$$\mathbf{v}(t) = \int \Phi^{-1}(t)\mathbf{f}(t)dt.$$

Por lo tanto, una solución particular de (31) es

$$\mathbf{x}_p(t) = \Phi(t)\mathbf{v}(t) = \Phi(t)\int \Phi^{-1}(t)\mathbf{f}(t)dt. \tag{34}$$

Combinando (34) con la solución $\Phi(t)\mathbf{c}$ del sistema homogéneo se tiene la siguiente solución general para (31)

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{c} + \Phi(t)\int \Phi^{-1}(t)\mathbf{f}(t)dt. \tag{35}$$

La elegancia de la deducción de la fórmula de variación de los parámetros (35) para sistemas, es evidente al compararla con la deducción más larga para el caso escalar.

Problema de Valor Inicial (PVI).

Dado un problema con valores iniciales de la forma

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{f}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \tag{36}$$

se puede usar la condición inicial para determinar $\mathbf{c}$ en (35). Al expresar $\mathbf{x}(t)$ mediante una integral definida se tiene

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{c} + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(u)\mathbf{f}(u)du.$$

Al usar la condición inicial se ve que $\mathbf{x}_0 = \Phi(t_0)\mathbf{c}$, De donde $\mathbf{c} = \Phi^{-1}(t_0)\mathbf{x}(t_0)$. De este modo, la solución de (36) está dada por la fórmula

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\mathbf{x}(t_0) + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(u)\mathbf{f}(u)du \tag{37}$$

Para aplicar la fórmula (37), primero se debe hallar una matriz fundamental $\Phi(t)$ para el sistema homogéneo. Cuando la matriz de coeficientes A es constante ya se han analizado métodos para determinar $\Phi(t)$. Sin embargo, si las entradas de A dependen de t, la determinación de $\Phi(t)$ puede ser muy difícil (implicando posiblemente ¡una serie de potencias matricial!).

Matriz exponencial

Recuerde que la sencilla ecuación diferencial $x' = ax$, donde a es una constante, tiene solución general $x(t) = ce^{at}$. De manera similar, se mostrará que una solución general del sistema normal $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ donde A es una matriz constante $n \times n$, está dada por $\mathbf{x}(t) = e^{tA}\mathbf{c}$. La primera tarea consiste en definir la exponencial matricial o matriz exponencial e^{tA}.

Definición 14. Para cualquier matriz constante A de $n \times n$,

$$e^{tA} = I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \cdots + \frac{t^n}{n!}A^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}A^n \tag{38}$$

En general se tiene el siguiente resultado

Lema 1. Si $A = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$, entonces

$$e^{tA} = \operatorname{diag}\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}\}.$$

Teorema 15. Sean A y B matrices constantes y, r, s y t escalares. Entonces

a) $e^{0A} = I$

b) $e^{(r+s)A} = e^{rA}e^{sA}$

c) $e^{rtI} = e^{rt}I$

d) $(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$

e) $e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}$, si $AB = BA$

f) $\frac{d}{dt}(e^{tA}) = Ae^{tA}$

La parte (f) del teorema 15 indica que e^{tA} es una matriz fundamental. Si se representa a la matriz exponencial e^{tA} por $\Psi(t)$, la ecuación

$$\frac{d}{dt}(e^{tA}) = Ae^{tA} \tag{39}$$

equivale a la ecuación matricial $\Psi'(t) = A\Psi(t)$. Además, de la definición 14 se deduce que $\Psi(0) = I$.

De acuerdo con la expresión de la sección 2.2, la solución general de la ecuación diferencial lineal de primer orden $x'(t) = ax(t) + f(t)$, donde a es una constante, se expresa como sigue

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t) = ce^{at} + e^{at}\int_0^t e^{-au}f(u)du$$

Para un sistema no homogéneo de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, se puede demostrar que la solución general de $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{f}$, donde A es una matriz constante $n \times n$, es

$$\mathbf{x}(t) = e^{tA}\mathbf{c} + e^{tA}\int_{t_0}^{t} e^{-uA}\mathbf{f}(u)du \tag{40}$$

Cálculo de e^{tA}

El hecho de saber que e^{tA} es una matriz fundamental tiene un uso práctico siempre que sea posible calcularla. Como se vio en el ejemplo **??**, si A es una matriz diagonal, entonces basta exponenciar los elementos de la diagonal (por t) para obtener e^{tA}. La definición de e^{tA} de la ecuación (38) sería una manera natural, para calcularla. Sin embargo, la utilidad práctica de (38) es limitada, porque sus componentes son series de potencias en t.

Uso de la transformada de Laplace

En la ecuación (39) se vio que $\mathbf{x} = e^{tA}$ es una solución de $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$. Como $e^{0A} = I$, $\mathbf{x} = e^{tA}$ es una solución del problema de valor inicial

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \ \mathbf{x}(0) = I. \tag{41}$$

Si $\mathbf{X}(s) = \mathscr{L}\{\mathbf{x}(t)\} = \mathscr{L}\{e^{tA}\}$, entonces aplicando transformada de Laplace en (41) se tiene

$$\begin{aligned} s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) &= A\mathbf{X}(s) \\ (sI - A)\mathbf{X}(s) &= I. \end{aligned}$$

Si se multiplica la última ecuación por $(sI - A)^{-1}$, entonces se obtiene $\mathbf{X}(s) = (sI - A)^{-1}$. Es decir,

$$\mathscr{L}\{e^{At}\} = (sI - A)^{-1}$$

de donde

$$e^{At} = \mathscr{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}. \tag{42}$$

Matrices nilpotentes

Si B es una matriz nilpotente, es decir, $B^k = 0$ para algún entero positivo k, entonces la serie para e^{tB} sólo tiene un número finito de términos, pues $B^{k+1} = B^{k+2} = \cdots = 0$. En tales casos, e^{tB} se reduce a

$$e^{tB} = I + tB + \cdots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}B^{k-1}.$$

Usaremos la ley de los exponentes y este hecho acerca de matrices nilpotentes para determinar e^{tA} para una clase particular de matrices. Sea r un escalar, como

$$e^{tA} = e^{rtI}e^{t(A-rI)}$$

se obtiene una representación finita de e^{tA} si $B = A - rI$ es nilpotente para alguna r. De hecho, cuando el polinomio característico de A tiene la forma $p(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^m$, es decir, cuando A tiene un valor propio λ_1 de multiplicidad m, el teorema de Cayley–Hamilton[1] implica que $(\lambda_1 I - A)^m = 0$. Por lo tanto, $A - \lambda I$ es nilpotente y

$$e^{tA} = e^{\lambda_1 t}\left[I + tB + \cdots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}B^{k-1}\right]$$

En general, no se espera que la matriz sea nilpotente, pero se puede aprovechar la siguiente relación entre matrices fundamentales como ayuda para calcular e^{tA}.

Lema 2. Sean $\Phi(t)$ y $\Psi(t)$ dos matrices fundamentales para el mismo sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$. Entonces existe una matriz constante C tal que $\Phi(t) = \Psi(t)C$.

Se puede usar el lema 2 para calcular e^{tA} cuando se conoce una matriz fundamental $\Phi(t)$ para $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$. Como e^{tA} también es una matriz fundamental para el sistema, el lema 2 afirma que $e^{tA} = \Phi(t)\boldsymbol{C}$ para una cierta matriz constante $\boldsymbol{C}$. Al hacer $t = 0$ se obtiene

$$e^{tA} = \Phi(t)\Phi^{-1}(0).$$

Aunque esta fórmula es útil, cambia el problema de determinar e^{tA} por el de determinar una matriz fundamental $\Phi(t)$. Por fortuna, se pueden usar las propiedades de la matriz exponencial e^{tA} para simplificar esta tarea. Como

[1] El teorema de Cayley-Hamilton establece que una matriz satisface su propia ecuación característica; es decir, $p(A) = 0$.

las columnas de una matriz fundamental deben tener la forma $e^{tA}\mathbf{u}$, se trata de hallar n vectores $\mathbf{u}$ para los que sea razonable el cálculo de $e^{tA}\mathbf{u}$.

Primero se usa la relación $e^{tA}\mathbf{u} = e^{rt}e^{t(A-rI)}\mathbf{u}$ para expresar $e^{tA}\mathbf{u}$ como

$$e^{tA}\mathbf{u} = e^{rt}e^{t(A-rI)} = e^{rt}\left[\mathbf{u} + t(A-rI)\mathbf{u} + \cdots + \frac{t^k}{k!}(A-rI)^k\mathbf{u} + \cdots\right] \tag{43}$$

Se sabe que si r es un valor propio de A y $\mathbf{u}$ es un vector propio asociado, entonces $e^{rt}\mathbf{u}$ es una solución de (43). En efecto, en este caso,

$$(A-rI)\mathbf{u} = (A-rI)^2\mathbf{u} = \cdots = 0.$$

Por la tanto, la serie en (43) se reduce al primer término, $e^{rt}\mathbf{u}$. Aunque es mucho esperar que $A - rI$ sea nilpotente, no es mucho pedir que $(A-rI)^k\mathbf{u} = 0$ para algún vector no trivial $\mathbf{u}$ y algún entero k.

Definición 15. Sea A una matriz constante $n \times n$ y r un valor propio de A. Un vector no trivial $\mathbf{u}$ que satisface $(A-rI)^k\mathbf{u} = 0$ para algún entero positivo k se llama un **vector propio generalizado** de A asociado a r.

Capítulo 6. Solución de ecuaciones diferenciales mediante series

Introducción y preliminares

Serie infinita. Una serie infinita es una expresión de la forma

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Serie de potencias. Una serie de potencias en torno a x_0 es una expresión de la forma

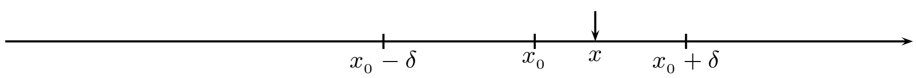
$$c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n. \tag{44}$$

1. Se dice que la serie (44) converge en el punto $x = a$ si la serie infinita $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(a-x_0)^n$ converge; es decir existe y es finito el límite de las sumas parciales

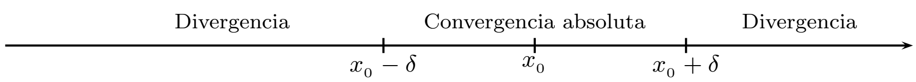
   $$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} c_n(a-x_0)^n.$$

   Si este límite no existe, se dice que la serie (44) diverge (o que es divergente) en $x = a$.
2. Si la serie converge para algún número $x_1 \neq x_0$, entonces converge para todo x tal que

   $$|x-x_0| \leq |x_1 - x_0| = \delta.$$



Teorema 16 (Radio de convergencia). Para cada serie de potencias de la forma (44) existe un número $\rho, (0 \leq \rho \leq \infty)$, llamado **radio de convergencia** de la serie de potencias, tal que (44) converge absolutamente para $|x-x_0| < \rho$ y diverge para $|x-x_0| > \rho$. Si la serie (44) converge para todo valor de x, entonces $\rho = \infty$. Si la serie (44) converge sólo en x_0 entonces $\rho = 0$.



Teorema 17 (Criterio del cociente). Si para n grande, los coeficientes a_n no se anulan y satisfacen

$$\lim_{N\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L,\ (0 \leq L \leq \infty),$$

entonces el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{N} c_n(x-x_0)^n$ es $\rho = 1/L$, donde $\rho = \infty$ si $L = 0$ y $\rho = 0$ si $L = \infty$

Teorema 18 (Principio de identidad). Si $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n = 0$ para toda x en cierto intervalo abierto, entonces $c_n = 0$ para todo n.

Observaciones

1. Si el cociente $|(a_{n+1})/a_n|$ no tiene límite, hay que usar otro método (por ejemplo el criterio de la raíz) para hallar el radio de convergencia ρ. En particular, si una infinidad de a_n se anulan, entonces no es posible aplicar el criterio del cociente directamente. Sin embargo, se puede modificar el criterio del cociente para aplicarlo a series que sólo contienen términos "pares" e "impares".

2. Para cada valor de x para el cual la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ converge, se obtiene un número que es la suma de la serie. Por lo tanto es adecuado denotar esa suma por $f(x)$, pues su valor depende de la elección de x; es decir, es una función de x. Así, se puede escribir

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n,\ |x-x_0| < \rho$$

Ejemplo 1. Serie geométrica

a) $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,\ |x| < 1$

b) $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n,\ |x| < 1$

Operaciones con series

Sean $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ y $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ dos series de potencias con radios de convergencia no nulos, entonces

1. $f(x) + g(x) = \sum_{n=0} (a_n + b_n)(x-x_0)^n$ para toda x en el intervalo común de convergencia

2. $f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ donde $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ (Producto de Cauchy).

3. $h(x) = f(x)/g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(x-x_0)^n$ donde los coeficientes d_n se obtiene al igualar los coeficientes del producto $f(x) = g(x)h(x)$; es decir, $a_n = \sum_{k=0}^{n} b_k d_{n-k}$ y resolver d_n.

Teorema 19. Si la serie $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ tiene un radio de convergencia $\rho > 0$, entonces f es diferenciable en el intervalo $|x-x_0| < \rho$. Además:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-x_0)^{n-1},\ \text{para}\ |x-x_0| < \rho$$

y

$$\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1} + C,\ \text{para}\ |x-x_0| < \rho.$$

Desplazamiento del índice de la suma

El índice de la suma de una serie de potencias es un índice nominal, como la variable de integración en una integral definida. Por lo tanto,

1. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x - x_0)^k = \sum_{i=0}^{\infty} c_i(x - x_0)^i$
2. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n = \sum_{k=i}^{\infty} c_{n-i}(x - x_0)^{n-i}$

Definición 16 (Función Analítica). Una función f es **analítica** en x_0 si en un intervalo abierto I en torno de x_0, esta función es la suma de una serie de potencias

Nota 1. Si f es analítica en x_0 entonces

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \ ;$$

es decir, la serie de potencias coincide con la serie de Taylor de f.

Solución mediante series de potencias

En esta sección se muestra un método para obtener una solución en serie de potencias de una ecuación diferencial homogénea de segundo orden con coeficientes analíticos; en especial, el caso en el que los coeficientes son polinomios. La generalización a orden superior es inmediata.

Primero se escribe la ecuación diferencial lineal.

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0 \tag{45}$$

en la forma

$$y''(x) + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{46}$$

llamada **forma estándar**, donde $p(x) = b(x)/a(x)$ y $q(x) = c(x)/a(x)$, si $a(x) \neq 0$.

Puntos ordinarios y singulares

Definición 17. Un punto x_0 es un **punto ordinario** de la ecuación (46) si $p(x)$ y $q(x)$ son analíticas en x_0 no es punto ordinario, se dice que es un **punto singular** de la ecuación.

0.0.1. Solución en torno a puntos ordinarios

Teorema 20. Suponga que x_0 es un punto ordinario para la ecuación (46). Entonces (46) tiene dos soluciones analíticas linealmente independientes de la forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n \tag{47}$$

Además, el radio de convergencia de cualquier solución en serie de potencias de la forma dada por (47) es al menos tan grande como la distancia de x_0 al punto singular (real o complejo) más cercano.

Observación 1. Se puede suponer sin pérdida de generalidad que $x_0 = 0$, de modo que (47) se transforma en

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{48}$$

De no ser así, la sustitución $t = x - x_0$ transforma la serie (47) en la forma (48) con $z(t) = y(t + x_0)$

Solución en torno a puntos singulares: método de Frobenius

Definición 18. Consdidere la ecuación

$$y''(x) + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{49}$$

Un punto singular x_0 de (49) es **regular** si $(x - x_0)p(x)$ y $(x - x_0)^2 q(x)$ son analíticas en x_0. En caso contrario, x_0 es un **punto singular irregular**.

Definición 19 (Ecuación indicial). Si x_0 es un punto singular regular de (49), entonces la ecuación inicial para este punto es

$$r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0 \tag{50}$$

donde

$$p_0 = \lim_{x\to x_0} (x - x_0)p(x) \quad \text{y} \quad q_0 = \lim_{x\to x_0} (x - x_0)^2 q(x)$$

Las raíces de la ecuación inicial son los **exponentes (índices)** de la singularidad x_0.

Teorema 21 (Método de Frobenius). Si x_0 es un punto singular regular de la ecuación (49) existe al menos una solución de la forma

$$y(x) = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^{n+r}, \quad c_0 \neq 0, \tag{51}$$

en donde el número r es una constante por determinar. Esta serie converge cuando menos en algún intervalo $0 < x - x_0 < \rho$.

Casos de la raíces indiciales

Cuando se aplica el método de Frobenius se pueden diferenciar tres casos que corresponden a la naturaleza de las raíces indiciales. Supondremos que r_1 y r_2 son la raíces reales de (50) y que, cuando son diferentes, r_1 es la raíz mayor.

Caso 1: Las raíces no difieren en un entero. Si r_1 y r_2 son distintas y no difieren en un entero, existen dos soluciones linealmente independientes de la forma

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^{n+r_1}, \quad c_0 \neq 0, \quad y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^{n+r_2}, \quad b_0 \neq 0$$

Caso 2. Las raíces difieren en un entero positivo. Si $r_1 - r_2$ es un entero positivo, existen dos soluciones linealmente independiente de la forma

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^{n+r_1}, \quad c_0 \neq 0$$

$$y_2(x) = C y_1(x) \ln(x - x_0) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^{n+r_2},\ b_0 \neq 0 \text{ y } C \text{ es una constante que puede ser cero.}$$

Caso 3. Raíces iguales. Si $r_1 = r_2$, siempre existen dos soluciones linealmente independientes de la forma

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^{n+r_1},\ c_0 \neq 0;\ y_2(x) = y_1(x) \ln(x - x_0) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^{n+r_1}$$

Ecuaciones y funciones especiales

La ecuaciones:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0 \tag{52}$$

$$(1 - x^2)y'' - 2xy'' + n(n+1)y = 0, \tag{53}$$

$$x(x-1)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]y' - \alpha\beta y = 0 \tag{54}$$

aparecen con frecuencia en estudios superiores de matemáticas aplicadas. Las ecuaciones (52), (53) y (54) se llaman **ecuación de Bessel**, **ecuación de Legendre** y **ecuación hipergeométrica** respectivamente.