Universidad Tecnológica de Pereira

FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

EXAMEN FINAL UNIFICADO DE ÁLGEBRA LINEAL

Nombre: ______________________ Código: ______________ Grupo: ___

Fecha: 3 de junio de 2015 Tiempo: 2 horas

Responda en forma clara, ordenada y justifcando cada una de sus respuestas.

I. $\boxed{\text{10 puntos}}$ **SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES Y GEOMETRÍA VECTORIAL.**

1. $\boxed{\text{5 ptos}}$ Encuentre los valores de α y β de modo que $S = \{\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}\}$ sea una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$, donde $\vec{\mathbf{u}} = (1, \beta, -2)$, $\vec{\mathbf{v}} = (\alpha, 1, 2)$ y $\vec{\mathbf{w}} = (2, -4, \alpha - 4\beta)$.

2. $\boxed{\text{5 ptos}}$ Halle el valor o valores de λ, si existen, de modo que $\|\vec{\mathbf{c}}\| = 8$, en donde $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}} \in \mathbb{R}^3$ tales que $\|\vec{\mathbf{a}}\| = 2$, $\|\vec{\mathbf{b}}\| = 3$, el ángulo entre $\vec{\mathbf{a}}$ y $\vec{\mathbf{b}}$ es $\theta = 2\pi/3$ y $\vec{\mathbf{c}} = (\vec{\mathbf{a}} \times \overrightarrow{\lambda \mathbf{b}}) - 2\vec{\mathbf{a}}$.

II. $\boxed{\text{10 puntos}}$ **ESPACIOS VECTORIALES.**

1. $\boxed{\text{4 ptos}}$ Sean $H_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = 2t, y = -t, z = 3t;\ t \in \mathbb{R} \right\}$ y $H_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x + y - z = 0 \right\}$.

a) Pruebe que H_2 es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

b) Halle el subespacio $H = H_1 \cap H_2$ y determine su dimensión.

2. $\boxed{\text{6 ptos}}$ Sea $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$

a) Encuentre $\ker \boldsymbol{A}$ y $\nu(\boldsymbol{A})$.

b) Halle una base ortonormal para $\ker \boldsymbol{A}$.

c) Determine $\rho(\boldsymbol{A})$.

III. $\boxed{\text{12 puntos}}$ **TRANSFORMACIONES LINEALES.** De los puntos 1 y 2, solo responda uno. **El punto 3 no es opcional.**

1. $\boxed{\text{4 ptos}}$ Demuestre que la función $T : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$ definida por $T(x) = \ln x$ es una transformación lineal, donde $\langle \mathbb{R}^+, \oplus, \odot \rangle$ es el espacio vectorial con las siguientes operaciones:

$$x \oplus y = xy \quad \text{y} \quad \lambda \odot x = x^\lambda$$

2. $\boxed{\text{4 ptos}}$ Determine $\ker T$ e $\operatorname{im} T$ para la transformación lineal $T : P_2 \mapsto P_1$, $T\big(p(x)\big) = p'(x)$.

3. $\boxed{\text{8 ptos}}$ Halle una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$ tal que $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ es la matriz de T con respecto a las bases $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ de $\mathbb{R}^2$ y $\mathcal{B}_2$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

IV. $\boxed{\text{10 puntos}}$ **VALORES Y VECTORES PROPIOS.** Responda uno de los dos puntos propuestos.

1. Considere la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

a) $\boxed{\text{2 ptos}}$ Compruebe que $\vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ es un vector propio de $\boldsymbol{A}$ y determine el valor propio correspondiente.

b) $\boxed{\text{2 ptos}}$ Encuentre todos los valores propios de $\boldsymbol{A}$ si $p(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda - 27$ es el polinomio característico.

c) $\boxed{\text{6 ptos}}$ Halle una matriz ortogonal $\boldsymbol{Q}$ que diagonalice a $\boldsymbol{A}$.

2. Considere la ecuación cuadrática $3x^2 + 4xy + 2\sqrt{5}\,x + 4\sqrt{5}\,y = 9$.

(a) $\boxed{\text{1 pto}}$ Halle la matriz simétrica $\boldsymbol{A}$ asociada a la parte cuadrática de la ecuación.

(b) $\boxed{\text{4 ptos}}$ Encuentre una matriz ortogonal $\boldsymbol{Q}$ que diagonalice a $\boldsymbol{A}$.

(c) $\boxed{\text{3 ptos}}$ Determine la forma canónica de la cónica.

(d) $\boxed{\text{2 ptos}}$ Dibuje la gráfica identificando el ángulo de rotación y los ejes principales.

V. $\boxed{\text{8 puntos}}$ **VERDADERO O FALSO.** Conteste verdadero o falso. Justifique claramente su respuesta. (Respuesta sin justificar no tiene validez). Responda solo 4 puntos de los 7 propuestos.

No.	V o F	Proposición
1.		Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores de $\mathbb{R}^n$ tales que $\Vert\mathbf{u} - \mathbf{v}\Vert = 1$ y $\Vert\mathbf{u} + \mathbf{v}\Vert = 5$, entonces $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 6$.
2.		Si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son matrices invertibles de orden 3 tales que $\left\vert -2\boldsymbol{A}^{-1} \right\vert = 4$, entonces $\left\vert \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} \right\vert = -4$.
3.		Si $\boldsymbol{A}$ es una matriz cuadrada de orden n simétrica e invertible, entonces $\boldsymbol{A}^{-1}$ es simétrica.
4.		$H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 0 \right\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^2$.
5.		Si $\boldsymbol{A}$ es una matriz 3×4 y $\ker(\boldsymbol{A}) = \{\mathbf{0}\}$, entonces $\operatorname{im}(\boldsymbol{A}) = \mathbb{R}^4$.
6.		Existen valores de α y β de modo que la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ es diagonalizable ortogonalmente.
7.		Si λ es un valor propio de una matriz invertible $\boldsymbol{A}$, entonces $1/\lambda$ es un valor propio de $\boldsymbol{A}^{-1}$.