Universidad Tecnológica de Pereira

Facultad de Ciencias Básicas
Departamento de Matemáticas

Segundo Parcial de Álgebra Lineal Grupo: __ Profesor: ________________________

Nombre: ____ Código: ________________________

Fecha: ____________________ Tiempo: 1 hora 45 minutos Nota: $\boxed{}$

Responda en forma clara, ordenada y justificando cada una de sus respuestas.

I. $\boxed{1.5}$ **MATRICES Y DETERMINANTES**.

1. $\boxed{0.5}$ Encuentre los valores de λ, si existen, de modo que la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 2 \\ 1 & \lambda+1 \end{pmatrix}$ sea singular.

2. $\boxed{1.0}$ Sean $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ matrices de orden 3. Si $\left|2\boldsymbol{A}^{-1}\right| = 4$ y $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Halle $\boldsymbol{X}$ si $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A})(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A})^{-1}$.

b) Calcule $\det \boldsymbol{X}$.

II. $\boxed{2.5}$ **ESPACIOS VECTORIALES**

1. $\boxed{1.0}$ Sea $\mathbf{u} = 1 + 8x + kx^2 + 5x^3$. Determine el valor o valores de k, si existe (o existen), de modo que $\mathbf{u}$ sea combinación lineal de

$$\mathbf{v}_1 = 1 + 2x + x^2 + 3x^3, \mathbf{v}_2 = 1 - x + 3x^2 + 2x^3, \mathbf{v}_3 = 1 + 5x - x^2 + 4x^3$$

2. $\boxed{1.5}$ Sean $H_1 = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ y $H_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid 2x + 3y - z = 0 \right\}$.

a) Encuentre una ecuación para el plano H_1.

b) Demuestre que H_2 es un subespacio de $V = \mathbb{R}^3$.

c) Caracterice los vectores del subespacio $H = H_1 \cap H_2$.

III. $\boxed{1.0}$ **VERDADERO o FALSO . Responda verdadero o falso cada una de las siguientes afirmaciones. Justifique claramente sus respuestas.**

1. __ Si $\boldsymbol{A}$ es una matriz $n \times n$ con dos filas iguales, entonces $\boldsymbol{A}$ es singular.

2. __ Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 15$, entonces $\begin{vmatrix} b & e & h \\ a-3c & d-3f & g-3i \\ 5c & 5f & 5i \end{vmatrix} = -75$.

3. __ $\mathbf{e} = \mathbf{0}$ es el módulo del espacio vectorial $\langle \mathbb{R}^+, \oplus, \odot \rangle$, donde

$$x \oplus y = xy, \quad \text{y} \quad \lambda \odot x = x^\lambda.$$

4. __ $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid y = x^2 \right\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^2$.