UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

EXAMEN FINAL UNIFICADO DE ÁLGEBRA LINEAL

Nombre: ______________________________ Código: ____________________ Grupo: ___

Fecha: 3 de diciembre de 2014 Tiempo: 2 horas

Responda en forma clara, ordenada y justifcando cada una de sus respuestas.

I. $\boxed{\text{13 puntos}}$ **Sistemas de ecuaciones lineales y geometría vectorial**

1. $\boxed{\text{8 ptos}}$ Sean $\vec{\mathbf{a}} = (1, -2, 2)$ y $\vec{\mathbf{c}} = (2, 3, 2)$. Halle un vector $\vec{\mathbf{b}} = (x, y, z)$ tal que $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{c}}$.

2. $\boxed{\text{5 ptos}}$ Halle el valor o valores de m, si existen, de modo que la recta $\mathcal{L} : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + mt, \ t \in \mathbb{R} \\ z = \quad -2t \end{cases}$ y el plano $\pi : x + (m-2)y + 3z = 7$ sean paralelos.

II. $\boxed{\text{15 puntos}}$ **Espacios vectoriales y transformaciones lineales.** Responda solo uno de los puntos 1 y 2.

1. $\boxed{\text{5 ptos}}$ Demuestre que $H = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & c \end{pmatrix} \mid b, c \in \mathbb{R} \right\}$ es un subespacio de $V = \mathcal{M}_2$, el espacio vectorial de las matrices de orden 2 con entradas reales.

2. $\boxed{\text{5 ptos}}$ Determine si la función $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ definida por $T(\vec{\mathbf{x}}) = \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{x}}$ es una transformación lineal, donde $\vec{\mathbf{u}}$ es un vector fijo de $\mathbb{R}^n$.

3. $\boxed{\text{10 ptos}}$ Sea $T : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^2$ una transformación lineal definida por $T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2z - 3w \\ -2x - 4z + 5w \end{pmatrix}$

(a) $\boxed{\text{4 ptos}}$ Halle el núcleo, una base para el núcleo y la nulidad de T.

(b) $\boxed{\text{4 ptos}}$ Encuentre el rango de T y la imagen de T

(c) $\boxed{\text{2 ptos}}$ Determine si $\vec{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ está en el núcleo de T.

III. $\boxed{\text{12 puntos}}$ **Valores y vectores propios.** Responda uno de los dos puntos propuestos.

1. Considere la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

(a) $\boxed{\text{4 ptos}}$ Determine si $\lambda = 1$ y $\lambda = 3$ son valores de propios de $\boldsymbol{A}$.

(b) $\boxed{\text{2 ptos}}$ Encuentre el valor propio correspondiente al vector propio $\vec{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ de $\boldsymbol{A}$.

(c) $\boxed{\text{2 ptos}}$ Halle el espacio característico del valor propio determinado en **(a)**.

(d) $\boxed{\text{4 ptos}}$ Encuentre una matriz $\boldsymbol{Q}$ que diagonalice ortogonalmente la matriz $\boldsymbol{A}$.

2. Considere la ecuación cuadrática $4x^2 + 4xy + y^2 - 5\sqrt{5}\,x = 5$.

(a) $\boxed{\text{2 ptos}}$ Halle la matriz simétrica $\boldsymbol{A}$ asociada a la parte cuadrática de la ecuación.

(b) $\boxed{\text{4 ptos}}$ Encuentre una matriz ortogonal $\boldsymbol{Q}$ que diagonalice ortogonalmente a $\boldsymbol{A}$.

(c) $\boxed{\text{3 ptos}}$ Determine la forma canónica de la cónica.

(d) $\boxed{\text{3 ptos}}$ Dibuje la gráfica identificando el ángulo de rotación y los ejes principales.

IV. $\boxed{\text{10 puntos}}$ **Falso o verdadero.** Conteste verdadero o falso. Justifique claramente su respuesta. (Respuesta sin justificar no tiene validez). Responda solo 5 puntos de los 8 propuestos.

No.	V o F	Proposición
1.		Si $\vec{\mathbf{a}}$ y $\vec{\mathbf{b}}$ son vectores ortogonales de $\mathbb{R}^3$, entonces $\lVert\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}\rVert = \lVert\vec{\mathbf{a}}\rVert\lVert\vec{\mathbf{b}}\rVert$.
2.		Si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ matrices cuadradas de orden n simétricas, entonces $\boldsymbol{AB}$ es simétrica.
3.		Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz invertible de orden 4. Si $\left\lvert -2\boldsymbol{A}^{-1}\right\rvert = 32$, entonces $\lvert\boldsymbol{A}\rvert = -16$.
4.		Existe al menos una matriz cuadrada $\boldsymbol{A}$ de orden n invertible tal que $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}$.
5.		La matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} x & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & y \end{pmatrix}$ tiene rango $\rho = 2$ si $x = 2$ y $y = 1$.
6.		Sea f una función derivable. La ecuación vectorial de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$, en el punto $(a, f(a))$ es $\vec{\mathbf{r}}(t) = (a, f(a)) + t(1, f'(a)), t \in \mathbb{R}$.
7.		El vector de coordenadas del polinomio $p(x) = x^2 - x - 2$ con respecto a la base $\mathcal{B} = \left\{x + 1, 1, x^2\right\}$ de $\mathbb{P}_2$ es $$[p(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
8.		$\vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es un vector propio de $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.