Vectores

Algunas cantidades físicas como la masa o a temperatura pueden ser representadas por un simple número. Decimos que estas cantidades solo tienen magnitud y por tanto es una cantidad ***escalar***. Otras cantidades requieren para su definición de magnitud y dirección. Estas son llamadas cantidades ***vectoriales***, como es el caso de las fuerzas, velocidades y aceleraciones, entre otras.

Un vector posee magnitud, dirección y sentido, Figura 1, y se denota mediante el símbolo $\vec{A}$. Su magnitud se expresa como $|\vec{A}|$.

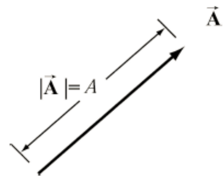

Figura 1. Magnitud y dirección de un vector

Para representar un vector es necesario escoger anticipadamente un sistema coordenado de manera que las magnitudes y direcciones del vector se midan a partir del origen del sistema O. Dentro de los sistemas coordenados más usados está el sistema coordenado cartesiano y el sistema coordenado polar.

El ***sistema coordenado cartesiano*** consiste de un conjunto de ejes perpendiculares entre si intersectados en un punto común que es el origen O. Los ejes cartesiano XYZ cumplen la regla de la mano derecha, por eso son llamados ortogonales a derechas. Cada punto en el espacio es asignado con un valor sobre cada. Así para un punto P, sus coordenadas serán x_P, y_P y z_P como se observa en la figura 2.

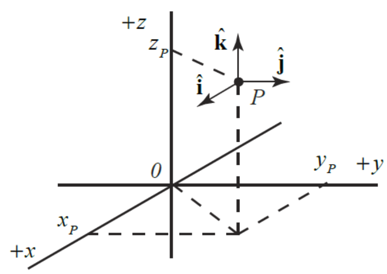

Figura 2. Componentes del vector posición P en el sistemas coordenado Cartesiano

La asociación del punto P se realiza sobre los tres vectores unitarios $\boldsymbol{\hat{\imath}}$, $\boldsymbol{\hat{\jmath}}$ **y** $\boldsymbol{\hat{k}}$ que definen el sistema XYZ. Cada vector unitario tiene como magnitud la unidad (1) y su sentido es positivo de acuerdo a la dirección en la que crece componente asociada, es decir $\boldsymbol{\hat{\imath}}$ es positivo en la dirección $+x$.

Gracias al sistema coordenado y los vectores unitarios se puede realizar descomposición del vector a lo largo de cada eje coordenado. El vector $\vec{A}$ de la figura 3 puede descomponerse como

$$\vec{A} = A_x\hat{\imath}+A_y\hat{\jmath}+A_z\hat{k}$$

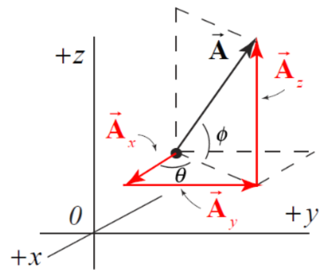

Figura 3. Descomposición del vector

El vector A puede también obtenerse como una suma de vectores. Esto es,

$\vec{A}=\overrightarrow{Ax}+\overrightarrow{Ay}+\overrightarrow{Az}$

Donde $\overrightarrow{Ax}=A_x\hat{\imath}, \overrightarrow{Ay}=A_y\hat{\jmath}$ y $\overrightarrow{Az}=A_z\hat{k}$.

La ***magnitud*** del vector se determina como,

$$|\vec{A}|=\sqrt{{A_x}^2+{A_y}^2+{A_z}^2}$$

Y su ***dirección*** se puede obtener de dos maneras diferentes. La primera es encontrando su *vector unitario* a partir de,

$$\hat{u}_A=\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}=\frac{\left(A_x\hat{\imath}+A_y\hat{\jmath}+A_z\hat{k}\right)}{\sqrt{{A_x}^2+{A_y}^2+{A_z}^2}}$$

O bien, a partir de los ángulos que definen el vector. Si por ejemplo, proyectamos el vector $\vec{A}$ sobre el plano XY de la figura 3, tendríamos el vector proyectado $\overrightarrow{A_{xy}}$ como se observa en la figura 4. Este vector $\overrightarrow{A_{xy}}$ es diferente de $\vec{A}$, pues está mediado por la proyección al eje XY a través del ángulo ϕ, es decir $\overrightarrow{A_{xy}}=\vec{A}\cdot cos\phi$.

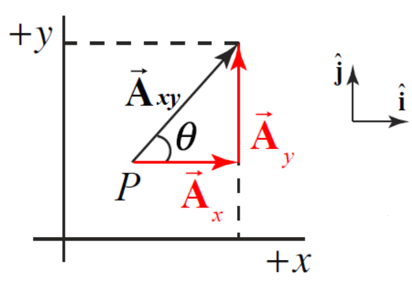

Figura 4. Descomposición del vector A sobre el plano XY

Ahora el ángulo θ define la dirección del vector $\overrightarrow{A_{xy}}$ en el plano XY,

$$\theta=tan^{-1}\left(\frac{A_y}{A_x}\right)$$

Y su vector unitario se define como,

$$\hat{u}_{Axy} = cos\theta\hat{\imath} + sin\theta\hat{\jmath}$$

De manera que el vector $\overrightarrow{A_{xy}}$ puede definirse también como,

$$\overrightarrow{A_{xy}} = \left|\overrightarrow{A_{xy}}\right| \cdot \hat{u}_{Axy} = A_x cos\theta\hat{\imath} + A_y sin\theta\hat{\jmath}$$

Algunas operaciones con vectores requieren el uso de funciones trigonométricas y el uso de leyes como la del seno y el coseno. Con el propósito de usarlas en el curso, se resumen a continuación.

Ley del seno

Para el triángulo mostrado en la figura 5, existe una relación de la igualdad entre las razones de los senos de los ángulos y la magnitud de su lado opuesto de los tres ángulos del triángulo. Esto es,

$$\frac{sin\alpha}{A} = \frac{sin\beta}{B} = \frac{sin\gamma}{C}$$

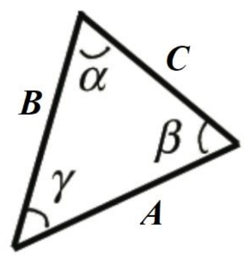

Figura 5. Triángulo para ley del seno

Ley del coseno

Para el mismo triángulo de la figura se tiene que,

$$A^2 = B^2 + C^2 - 2BC \cdot cos\alpha$$

$$B^2 = A^2 + C^2 - 2AC \cdot cos\beta$$

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cdot cos\gamma$$

Note que en caso de tratarse de vectores los términos A, B y C hacen referencia a las normas de los vectores, es decir, $A=\left|\vec{A}\right|$, $B=\left|\vec{B}\right|$ y $C=\left|\vec{C}\right|$.

Con estos vectores pueden realizarse operaciones como la suma, resta, multiplicación por escalar, producto escalar y producto vectorial.

1. **Suma de vectores**

Sean dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, el vector suma $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ puede obtenerse por construcción geométrica. Dibuje la flecha que representa el vector $\vec{A}$ y coloque la cola del vector $\vec{B}$ en la cabeza de $\vec{A}$, como se muestra en la figura 6. La fleca que inicia desde la cola de $\vec{A}$ hasta la cabeza de $\vec{B}$ corresponde al vector suma $\vec{C}$.

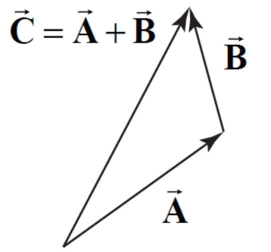

Figura 6. Suma de vectores (cabeza-cola)

Existe una construcción equivalente para la ley del vector suma. Ambos vectores son organizados formando un paralelogramo, figura 7. La diagonal del paralelogramo corresponde al vector suma $\vec{C}$.

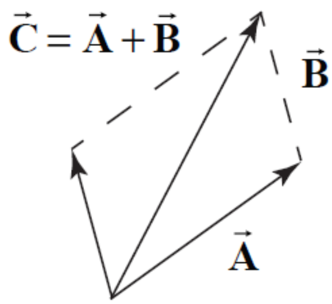

Figura 7. Ley del paralelogramo

Suma vectorial por componentes de vector

Sean $\vec{A}$ y $\vec{B}$ dos vectores en el plano *xy*. θ_A y θ_B son los ángulos que los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ hacen con el eje positivo de las *x* (sentido positivo contrario a las manecillas del reloj), de manera que,

$$\vec{A} = Acos\theta_A\hat{\imath} + Asin\theta_A\hat{\jmath}$$

$$\vec{B} = Bcos\theta_B\hat{\imath} + Bsin\theta_B\hat{\jmath}$$

El vector suma C=A+B es mostrado en la figura 8. Sus componentes corresponden a la suma escalar de las componentes de cada vector individual, esto es,

$$Cx = Ax + Bx \text{ y } Cy = Ay + By$$

$$\vec{C} = (Acos\theta_A + Bcos\theta_B)\hat{\imath} + (Asin\theta_A + Bsin\theta_B)\hat{\jmath} +$$

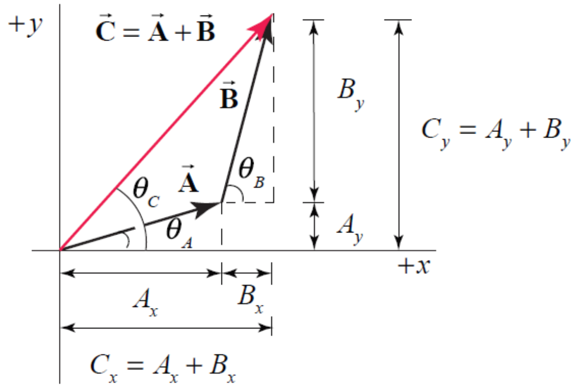

Figura 8. Suma de vectores por componentes

El ángulo θ_c se obtiene como,

$$\theta_c = tan^{-1}\left(\frac{Cy}{Cx}\right)$$

La suma de vectores cumple con cuatro propiedades: conmutativa, asociativa, elemento identidad y elemento inverso para la suma.

Conmutatividad. El orden de los factores no alterna el vector suma, figura 9.

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$

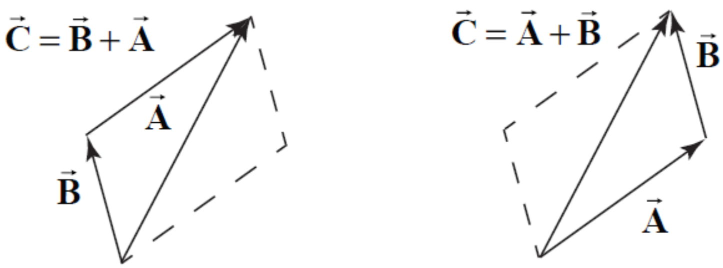

Figura 9. Ley conmutativa en la suma vectorial

Asociatividad. Cuando sumamos más de dos vectores, es posible realizar sumas sucesivas, sin importar qué vectores de asocien en cada suma, figura 10.

$$\left(\vec{A} + \vec{B}\right) + \vec{C} = \vec{A} + \left(\vec{B} + \vec{C}\right)$$

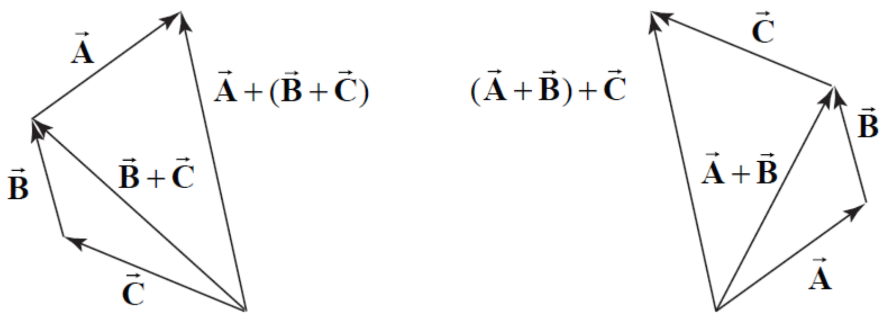

Figura 10. Ley asociativa en la suma vectorial

Elemento identidad para la suma. El vector $\vec{0}$ en la suma cumple con,

$$\vec{A}+\vec{0}=\vec{A}$$

Elemento inverso para la suma. Para cada vector $\vec{A}$ hay un único vector inverso $-\vec{A}$ de manera que,

$$\vec{A}+(-\vec{A})=\vec{0}$$

El vector $-\vec{A}$ tiene la misma magnitud que el vector $\vec{A}$, $|\vec{A}|=|-\vec{A}|=A$; tiene la misma dirección pero sentidos opuestos.

2. Multiplicación de vector por escalar

Las vectores pueden multiplicarse por números reales. Sea $\vec{A}$ un vector y ***c*** un número real positivo. La multiplicación de $\vec{A}$ y c es un nuevo vector denotado por $c\vec{A}$. La magnitud de $c\vec{A}$ es c veces la magnitud de $\vec{A}$. Si c es positivo la dirección y sentido de $c\vec{A}$ permanecen igual, pero si c es negativo, el sentido de $c\vec{A}$ cambia, figura 11.

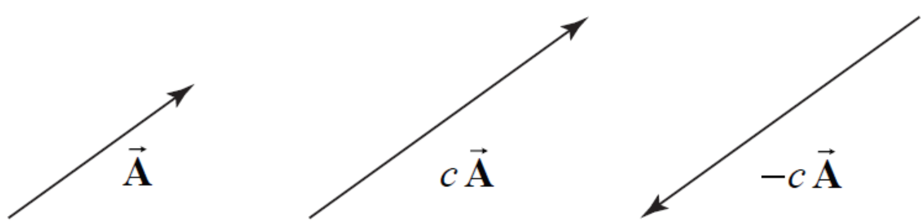

Figura 11. Multiplicación de vector por escalar

Ley asociativa para la multiplicación escalar. El orden de los factores escalares en la multiplicación no afecta el resultado. Siendo b y c números reales,

$$b(c\vec{A})=(bc)\vec{A}=(cb\vec{A})=c(b\vec{A})$$

Ley distributiva. Para la suma de vectores y multiplicación por escalar se satisface que,

$$c(\vec{A} + \vec{B}) = c\vec{A} + c\vec{B}$$

También se cumple,

$$(b + c)\vec{A} = b\vec{A} + c\vec{A}$$

Elemento identidad en la multiplicación. El número 1 es el elemento identidad en la multiplicación de vectores (multiplicación escalar). De esta manera,

$$1\vec{A} = \vec{A}$$