Cinemática de partícula

Tema 1

Movimiento rectilíneo

1. Introducción

El curso de Mecánica II tiene como principal objetivo el estudio del movimiento tanto de partículas como de cuerpos rígidos en condiciones de movimiento acelerado, lo que comúnmente se conoce como ***Dinámica***. Para que su estudio sea más simple, lo dividimos en dos partes:

- ***Cinemática***: encargada de los aspectos geométricos del movimiento. Analiza posiciones, velocidades y aceleraciones sin importar las fuerzas que actúan sobre las partículas y cuerpos.

- ***Cinética***: estudia el movimiento teniendo en cuenta las causas que lo producen. Analiza posiciones, velocidades, aceleraciones, fuerzas y momentos. En este tipo de análisis se requieren además de datos de tipo geométrico, características inerciales y fuerzas que pueden estar dadas por muelles, amortiguadores, actuadores, fricción, peso, etc.

En ambos casos, el estudio se aborda teniendo en cuenta si analizamos partículas o cuerpos rígidos. Cuando hablamos de ***partícula*** nos referimos a un elemento, puede ser también un cuerpo, que aunque tiene masa, su dimensión es reducida a un punto, de tal manera que todas las fuerzas que actúan sobre él, son concurrentes, es decir, es aplican sobre el punto. Como no hay dimensiones, no hay características inerciales además de la masa y, los giros que presenta sobre su propio eje no son tenidos en cuenta. Si nos referimos a un ***cuerpo rígido***, hablamos de un elemento que además de tener masa, presenta dimensiones que le otorgan otras características inerciales como momentos de inercia de masa y ubicación de sus centros de masa respecto a un sistema de referencia particular. Las fuerzas actuantes no son concurrentes, por lo que pueden ser aplicadas en diferentes puntos del cuerpo, generando así giros del cuerpo alrededor de sí mismos. Otra característica importante del cuerpo rígido es que son indeformables, es decir, las posiciones relativas de dos puntos cualesquiera pertenecientes a un mismo cuerpo se conservarán a lo largo de todo su movimiento.

Al estudiar el movimiento de cualquier elemento debemos tener en cuenta el sistema de referencia utilizado. Si el observador está fijo a la tierra se dice que el sistema de referencia es fijo y su movimiento es ***absoluto***. Cuando el observador se mueve, hablamos de un sistema de referencia ***relativo***. Dependerá entonces del tipo de elemento analizado; los cuerpos rígidos suelen ser estudiados a partir de sistemas de referencia relativos (la mayor parte de los casos), mientras que las partículas suelen analizarse a partir de sistemas de referencia absolutos.

2. Posición, velocidad y aceleración

Las variables posición, velocidad y aceleración son cantidades vectoriales. Presentan magnitud, dirección y sentido, y son representadas como vectores, con un punto inicial que corresponde al sistema de referencia escogido y un punto final coincidente con la variable solicitada para el elemento.

Al estudiar el movimiento de un cuerpo, la primera variable involucrada es la posición. Cuando hablamos de posición nos referimos a la ubicación de una partícula o de un punto de un cuerpo cualquiera en el sistema de referencia. En la figura 1 se representa la posición $\vec{r}$ del punto P respecto a un sistema de referencia fijo O. Si el punto está en movimiento, el vector posición dependerá del tiempo $r=f(t)$ y cada una de esas posiciones consecutivas a lo largo del tiempo definirán la trayectoria seguida por el punto.

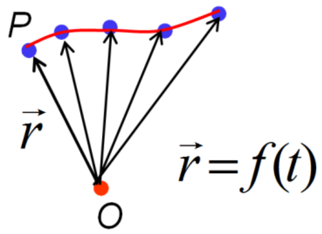

Figura 1. Posición del punto P

En el tiempo t la posición del punto será $\overrightarrow{r(t)}$ y cuando haya transcurrido el tiempo Δt su posición será $\overrightarrow{r(t+\Delta t)}$ (figura 2). El vector desplazamiento de la partícula desde el tiempo t hasta t+Δt será la recta tangente $\overrightarrow{\Delta r}$ que une los dos puntos y se determina como,

$$\overrightarrow{\Delta r} = \overrightarrow{r(t+\Delta t)} - \overrightarrow{r(t)} \qquad (1)$$

Si este vector se divide por Δt se obtiene la velocidad media del punto P,

$$\overrightarrow{v_{media}} = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} \qquad (2)$$

Observe que este valor depende únicamente de los estados inicial y final y no nos indica qué ocurre en los estados intermedios entre t y t+Δt

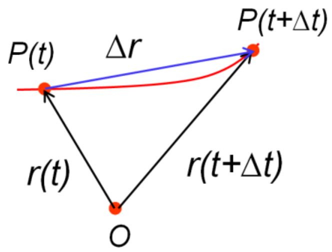

Figura 2. Vector desplazamiento

Si hacemos muy pequeño Δt y aplicamos el límite se obtiene la velocidad instantánea,

$$\overrightarrow{v_{inst}} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{r(t+\Delta t)-r(t)}{\Delta t}\right) \qquad (3)$$

Definido de esta manera, estamos ante la derivada de un vector, por lo que,

$$\vec{v} = \frac{\overrightarrow{dr}}{dt} \qquad (4)$$

De esta manera, podemos decir que la velocidad de una partícula es tangente su trayectoria (figura 3) .

Figura 3. Velocidad tangente a la trayectoria.

Con la velocidad ocurre lo mismo que con la posición como función del tiempo $v = f(t)$ y su curva se denomina curva hodógrafa. Según si hablamos de cambios de velocidad en un período Δt mayor o menor (infinitesimal) estaremos hablando de aceleraciones medias e instantáneas,

$$\vec{a}_{media} = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t} = \frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t} \tag{5}$$

$$\vec{a}_{instánea} = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}\right) = \frac{\overrightarrow{dv}}{dt} = \frac{\overrightarrow{d^2 r}}{dt} = \vec{a} \tag{6}$$

Por lo tanto la aceleración será tangente a la curva hodógrafa, pero no a la trayectoria del punto.

3. Movimiento rectilíneo

Las partículas pueden moverse en trayectorias rectas, para lo cual requerimos únicamente de un solo eje coordenado. En este caso, siendo el único, la velocidad no será tangente a la trayectoria de la partícula, ni la aceleración a la curva hodógrafa. En este caso el desplazamiento, la velocidad y la aceleración son colineales (figura 4).

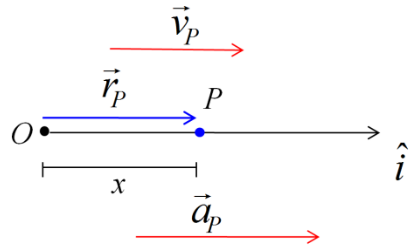

Figura 4. Sistema coordenado para movimiento rectilíneo.

A pesar de ser cantidades vectoriales, como se utiliza un solo eje coordenado, es posible trabajar las ecuaciones resultantes de forma escalar.

$$\vec{r}_p = s\cdot\hat{i}, \qquad \vec{v}_p = \frac{ds_p}{dt}\cdot\hat{i}, \qquad \vec{a}_p = \frac{dv_p}{dt}\cdot\hat{i} \tag{7}$$

Si el valor de la aceleración es positiva significa que la partícula está acelerando, si es nula que viaja a velocidad constante y si es negativa significa que la partícula está desacelerando.

Si se conoce la función de aceleración *a=f(t)* para el punto de interés *P*, es posible encontrar su velocidad a partir de la expresión,

$$a_p = \frac{dv_p}{dt} \tag{8}$$

Para lo cual separamos variables e integramos,

$$\int_{t_0}^{t} a_p dt = \int_{v_0}^{v} dv \tag{9}$$

De donde se tiene que,

$$v_p = v_{0_p} + \int_{t_0}^{t} a_p dt \tag{10}$$

De igual manera, conociendo que,

$$v_p = \frac{ds_p}{dt} = v_{0_p} + \int_{t_0}^{t} a_p dt \tag{11}$$

Separando variables e integrando, se obtiene la posición para el punto *P*,

$$\int_{s_{0_p}}^{s_p} ds_p = \int_{t_0}^{t} \left(v_{0_p} + \int_{t_0}^{t} a_p dt \right) dt$$

$$s_p = s_{0_p} + v_{0_p} t + \int_{t_0}^{t} \left(\int_{t_0}^{t} a_p dt \right) dt \qquad (12)$$

En el caso en el cual la velocidad sea función de la posición *v=f(s,t)*, en este caso aplicando la regla de la cadena,

$$a_p = \frac{dv_p}{dt} = \frac{dv_p}{ds_p} \underbrace{\frac{ds_p}{dt}}_{v_p} = v_p \frac{dv_p}{ds_p} \qquad (13)$$

Con lo cual,

$$\int_{s_{0p}}^{s_p} a_p ds_p = \int_{v_{0p}}^{v_p} v_p dv_p \qquad (14)$$

de donde,

$$v_p^2 = v_{0p}^2 + 2\int_{s_{0p}}^{s_p} a_p ds_p \qquad (15)$$

3.1. Movimiento uniforme

Se tendrá movimiento uniforme cuando la velocidad es constante. En este caso, su derivada, es decir la aceleración, es nula. Por tanto de las expresiones anteriores se tendrá solamente que,

$$\begin{gathered} v = v_0 \\ s_p = s_{0_p} + v_{0_p} t \end{gathered} \qquad (16)$$

3.2. Movimiento uniformemente acelerado

En este caso, la aceleración es constante y por lo tanto las integrales de las expresiones anteriores serán conocidas. Si *a=constante*, entonces,

$$\begin{gathered} v_p = v_{0_p} + a_p t \\ s_p = s_{0_p} + v_{0_p} t + \frac{a_p t^2}{2} \\ v_p^2 = v_{0p}^2 + 2a_p \left(s_p - s_{0p} \right) \end{gathered} \qquad (17)$$

4. Método gráfico en movimiento rectilíneo

En algunos casos, es posible conocer de forma gráfica el cambio de alguna de las magnitudes de interés (posición, velocidad o aceleración) respecto al tiempo. En estos casos, es posible obtener las demás variables fácilmente, ya sea derivando o integrando gráficamente la función de la variable conocida. Así, por ejemplo, si la aceleración de una partícula entre dos estados es constante, es decir, gráficamente es una línea recta de pendiente nula (figura 5), la velocidad, que corresponde a su integral, será una curva de grado uno (recta), y su desplazamiento una curva de grado dos (parábola). En caso de conocer la función posición, derivamos gráficamente para encontrar la velocidad y volvemos a derivar para encontrar la aceleración. Observe que si pasamos desde la curva de aceleración a construir gráficamente la curva de velocidad, ésta última inicia a partir de un valor v_0 conocido y que debe ser aportado como un dato inicial. Lo mismo ocurre con la posición inicial s_0.

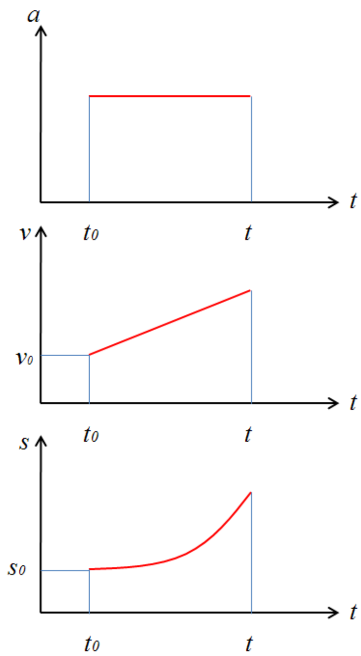

Figura 5. Derivación e integración gráfica de las variables *s*, *v* y *a* como función de *t*

Este tipo de metodología es muy útil cuando se trabajan movimientos que pueden ser separados en intervalos de tiempo, por ejemplo, cuando tenemos una partícula que cambia varias veces de estado a lo largo de su movimiento (aceleraciones, desaceleraciones, movimiento uniforme, etc.). Para la construcción de las gráficas tenemos en cuenta que para la velocidad, definida de acuerdo a la expresión (10), su cambio desde t_0 hasta t corresponde al área bajo la curva de aceleración para el intervalo de tiempo requerido, tal como se aprecia en la figura 6. De tal manera, que no es necesario integrar la curva de aceleración en cada punto para conocer el cambio total de su velocidad en dicho intervalo, basta con encontrar el área bajo la curva. Dado que se desee conocer la magnitud de la velocidad en un punto intermedio, entre t_0 y t sí que es necesario encontrar la función de velocidad para evaluarla en ese instante de tiempo.

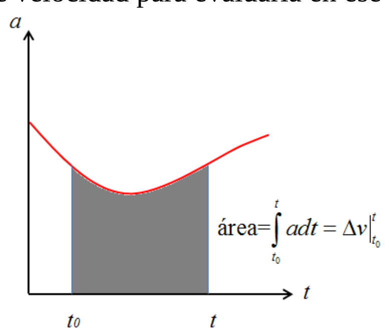

Figura 6. Relación de área bajo la curva e integral de función

De igual manera ocurre con el desplazamiento a partir de la curva de velocidad como función del tiempo.

Si acaso la gráfica dada fuese la aceleración o la velocidad de la partícula como función ya no del tiempo sino de la posición *a=f(s)* o *v=f(s)*, el área bajo la curva ya no corresponde a los cambios de velocidad y posición en el intervalo dado, y se debe recurrir a aplicar la regla de la cadena para obtener dichos valores, tal como se indica en la expresión (15).

En la figura 7 se presenta la curva de aceleración de una partícula que inicia su movimiento partiendo del reposo. En el primer intervalo (0 - t_1 s), la partícula inicia su movimiento con aceleración constante de magnitud *2*, por lo que para este mismo intervalo de tiempo, la curva de velocidad corresponde a una recta con pendiente positiva. Para saber el cambio, en este caso aumento, de la velocidad desde el reposo (tiempo 0 s) se obtiene el área bajo la curva de aceleración para el intervalo analizado (área A). Nótese también que la pendiente de la curva de velocidad en este rango corresponde a la magnitud de la aceleración en el mismo. En este mismo intervalo, la gráfica de posición, corresponde a una curva de un grado superior a la de velocidad, es decir, de segundo grado y cuyo cambio Δs corresponde al área bajo la curva de velocidad (área C).

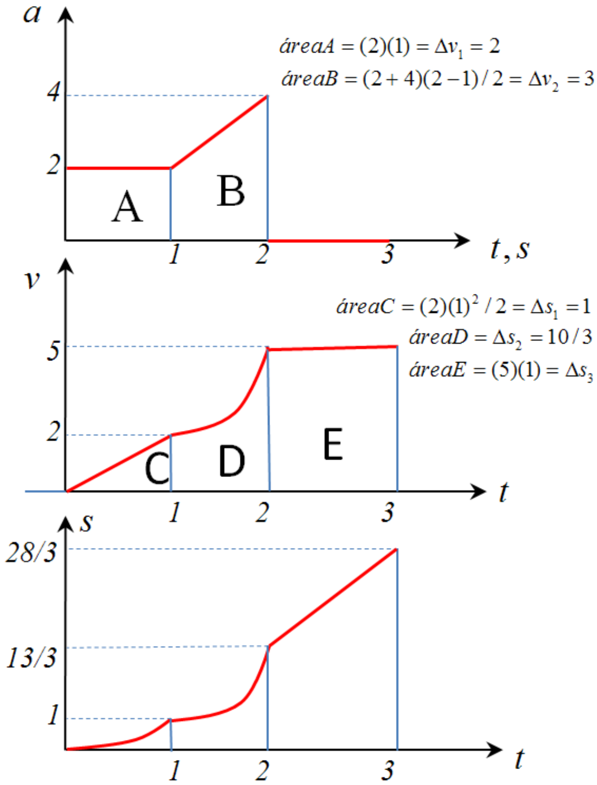

Figura 7. Gráficas *s*, *v* y *a* vs *t* para una partícula dada.

En el segundo intervalo (t_1 y t_2), la aceleración es una recta, por lo que la velocidad corresponde a una curva de grado dos y la posición es una curva de grado tres. El área B corresponde al cambio de la velocidad y el área B al cambio de la posición para dicho intervalo. En el ultimo intervalo (t_2 y t_3), la aceleración es nula, por lo que la velocidad permanece constante. Aquí el área E, correspondiente a la curva de velocidad, representa el cambio de posición en ese intervalo de tiempo.

En el ejemplo anterior, las áreas bajo las curvas son positivas en todos los casos, por eso los cambios que representan se adoptan como positivos. En el caso en que las áreas fuesen negativas, el cambio será negativo también y deberá restarse al valor que presenta la variable al inicio del intervalo.

5. Movimiento rectilíneo de varias partículas

Cuando analizamos el movimiento de varias partículas, es común determinar sus variables cinemáticas utilizando sistemas de referencia relativos.

En la figura 8 se observan dos cuerpos A y B cuyas posiciones absolutas respecto al sistema de referencia ubicado en O son S_A y S_B respectivamente. Ambas magnitudes son positivas de acuerdo al sistema de referencia adoptado.

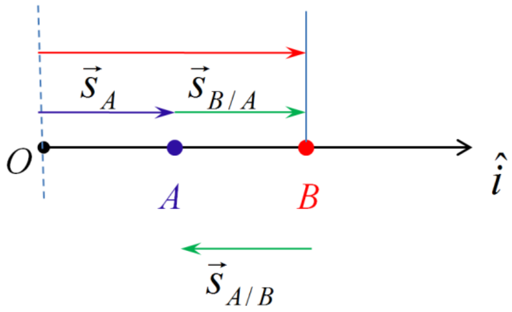

Figura 8. Vectores relativos entre partículas

Como ya se indicó anteriormente, en el movimiento rectilíneo al tener un solo eje coordenado, es posible trabajar las cantidades vectoriales como si fuesen escalares, de tal manera que tendríamos,

$$\vec{S}_A = S_A \hat{i}$$
$$\vec{S}_B = S_B \hat{i} \tag{18}$$

Si conocemos el vector posición absoluto de una de las partículas y el vector posición de una respecto a la otra, podremos determinar la posición absoluta de la otra partícula como,

$$S_B = S_A + S_{B/A}$$
$$S_A = S_B + S_{A/B} \tag{19}$$

El vector $s_{A/B}$ y $s_{B/A}$ son iguales en magnitud pero en sentido contrario y cada uno de ellos se determinan,

$$S_{A/B} = S_A - S_B$$
$$S_{B/A} = S_B - S_A \tag{20}$$

Para encontrar las velocidades se deriva la posición respecto al tiempo y se tiene que,

$$v_B = v_A + v_{B/A}$$
$$v_A = v_B + v_{A/B} \tag{21}$$

Derivando nuevamente respecto al tiempo se obtienen las aceleraciones,

$$a_B = a_A + a_{B/A}$$
$$a_A = a_B + a_{A/B} \tag{22}$$

Dentro de las aplicaciones de este tipo de movimiento de partículas se tienen los sistemas de elementos unidos a través de cuerdas inextensibles y poleas. En la figura 9 se tienen varios tipos de sistemas en los que el sistema de referencia fijo puede encontrarse en un extremo o en medio de las partículas. En este caso, se tendrá una magnitud que no cambiaran con el movimiento del sistema y al que se conocen como *datum*. Las longitudes de las cuerdas como se ha dicho son inextensibles, por lo tanto sus derivadas son nulas.

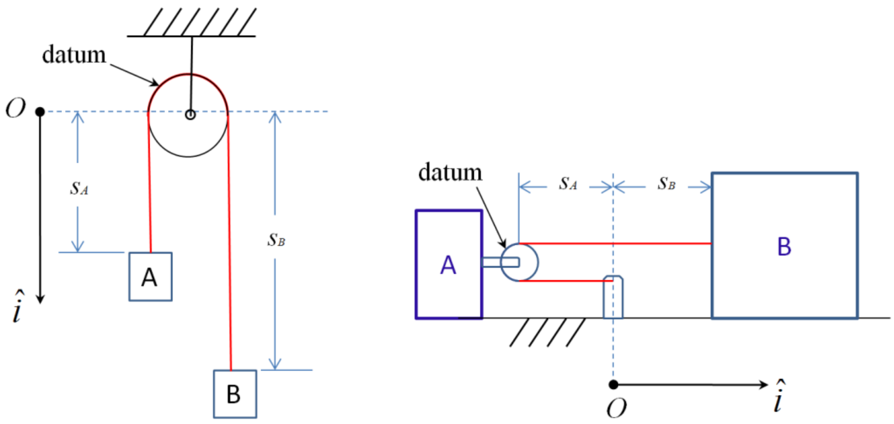

Figura 9. Diversos sistemas de poleas

En el caso de la figura 9, izquierda, la ecuación de la cuerda se da como,

$$s_A + datum + s_B = l \tag{23}$$

Derivando respecto al tiempo,

$$\begin{aligned} v_A + v_B &= 0 \quad \rightarrow \quad v_A = -v_B \\ a_A + a_B &= 0 \quad \rightarrow \quad a_A = -a_B \end{aligned} \tag{24}$$

En este sistema la velocidad y aceleración de *A* son iguales en magnitud a *B* pero en sentido contrario. Por tanto, si *A* se mueve hacia arriba, *B* bajará y viceversa.

En el sistema de la figura 9, derecha, el sistema de referencia se encuentra en medio de las partículas, dando lugar a la ecuación de la cuerda,

$$-2s_A - datum + s_B = 0 \tag{25}$$

Sus derivadas se obtienen como,

$$\begin{aligned} -2v_A + v_B &= 0 \quad \rightarrow \quad v_A = \frac{v_B}{2} \\ -2a_A + a_B &= 0 \quad \rightarrow \quad a_A = \frac{a_B}{2} \end{aligned} \tag{26}$$

En este caso, ambos elementos se mueven en la misma dirección.

Es posible también tener varias poleas, lo que se conoce como polipastos. En estos casos, las relaciones de los elementos se obtienen a través de la ecuación de todas las cuerdas existentes y sus derivadas. En la figura 10 se tiene un sistema con dos poleas móviles y una fija cuyas ecuaciones de las cuerdas se obtienen como,

$$\begin{gathered}(s_A - s_C) + s_A + datum2 + (s_A - s_C) + datum3 + (s_B - s_C) = l_1 \rightarrow 2s_A + s_B - 2s_C = l_1 - datum1 - datum2 \\ s_A + datum1 + s_C = l_2\end{gathered} \quad (27)$$

Derivando respecto al tiempo se obtienen las velocidades y aceleraciones,

$$\begin{gathered}2v_A + v_B - 2v_C = 0 \qquad 2a_A + a_B - 2a_C = 0 \\ v_A + v_C = 0 \qquad a_A + a_C = 0\end{gathered} \quad (28)$$

Las expresiones anteriores forman dos sistemas de ecuaciones lineales de dos ecuaciones y dos incógnitas cada uno, por lo que es necesario para su resolución conocer de antemano una de las 3 variables implicadas por cada sistema.

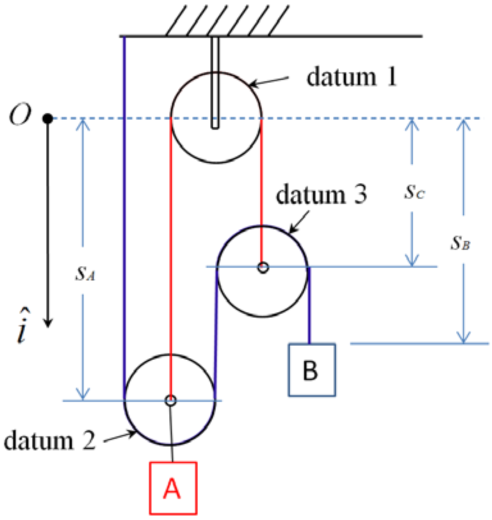

Figura 10. Polipasto